



Matemática Maravillosa

Matrices y transformaciones



El teleférico de Caracas, situado en el Parque Nacional El Ávila, es un buen ejemplo de traslación.

Fuente: http://gallery.tyka.org/avila/IMG_1389

Fascículo

22

Matrices y transformaciones en el espacio

Así como se estudian transformaciones geométricas en el plano, tales como traslaciones, rotaciones y simetrías axiales, que representan movimientos donde las figuras se reflejan, giran o se deslizan sin cambiar de forma ni de tamaño, o como las homotecias que ajustan el tamaño de las figuras sin cambiar su forma, se pueden estudiar las transformaciones del espacio tridimensional en sí mismo.



Traslación



Rotación



Simetría

Traslación

Una traslación en el espacio es un tipo de transformación que conserva las distancias.

Dado un punto o un conjunto de puntos en el espacio, podemos trasladarlos según un vector v del mismo espacio.

A estas transformaciones se asocian matrices cuadradas de orden 3, análogas a las de las transformaciones geométricas en el plano.

En un sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto

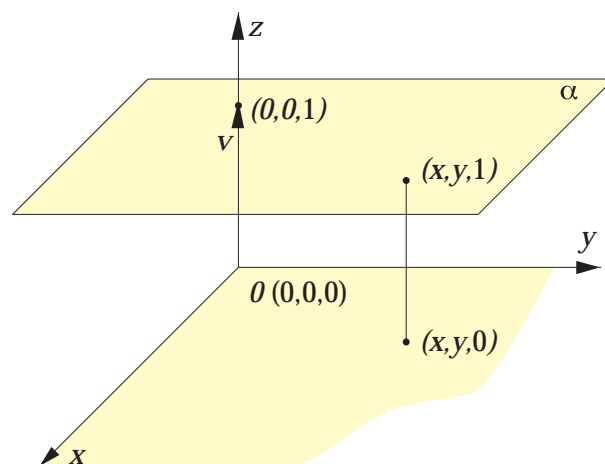
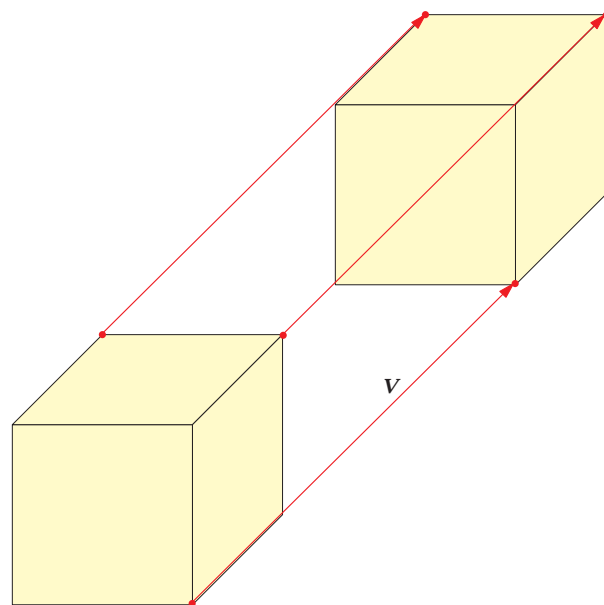
(x, y, z) asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, se le traslada con un vec-

tor fijo no nulo $v = (x_0, y_0, z_0)$, haciendo la suma matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{Así:} \quad \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \\ z' = z + z_0 \end{cases}$$

Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, si consideramos los puntos $(x, y, 0)$ del plano xy , al trasladarlos con el vector $v = (0, 0, 1)$, se tiene el plano α cuyos puntos son de coordenadas $(x, y, 1)$.

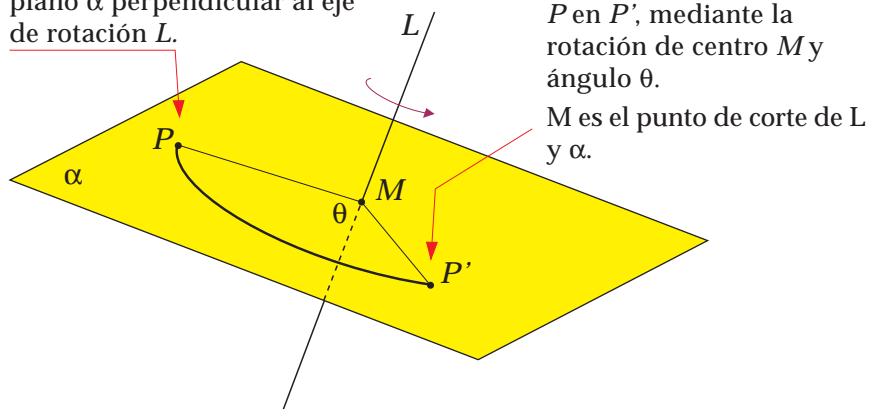
Observa que la traslación no deja puntos fijos ($v \neq \vec{0}$).



Rotación

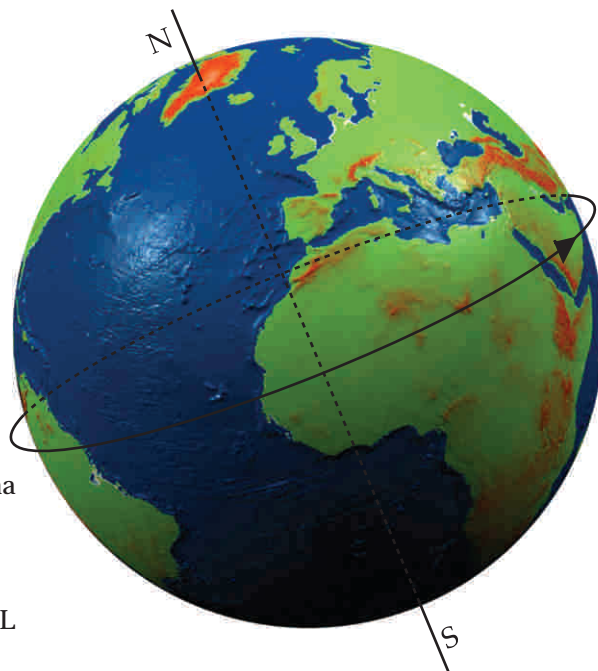
Una rotación en el espacio hace corresponder a un punto P del mismo otro punto P' , al describir un ángulo θ alrededor de un eje de rotación L .

Por el punto P , se traza el plano α perpendicular al eje de rotación L .



En el plano α se transforma P en P' , mediante la rotación de centro M y ángulo θ .

M es el punto de corte de L y α .



La Tierra rota alrededor de un eje perpendicular al plano del ecuador que pasa por el centro de la Tierra. Completa una vuelta en 23 horas y 56 minutos ≈ 24 h. Debido a este movimiento se suceden los días y las noches en el planeta.

Observa que los puntos del eje L quedan fijos en la rotación.

Consideramos ahora un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Una rotación de ángulo θ alrededor del eje z , en sentido positivo, transforma cada punto de coordenadas

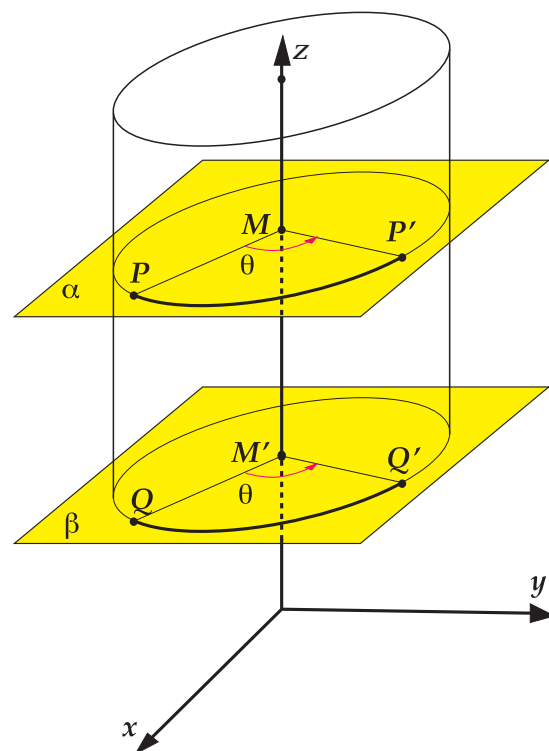
(x, y, z) , asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el punto (x', y', z') ,

asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por

las ecuaciones $\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$

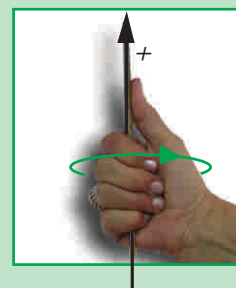
de modo que su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En el caso que se presenta a la derecha, los puntos del eje z quedan fijos en la rotación, es decir, los puntos de coordenadas $(0, 0, z)$.



INTERESANTE

El sentido de la rotación se puede determinar aplicando la “regla de la mano derecha”. Si “se toma el eje” con la mano derecha, colocando el pulgar en el sentido positivo del eje, entonces los demás dedos indican cuál es el sentido positivo de la rotación.

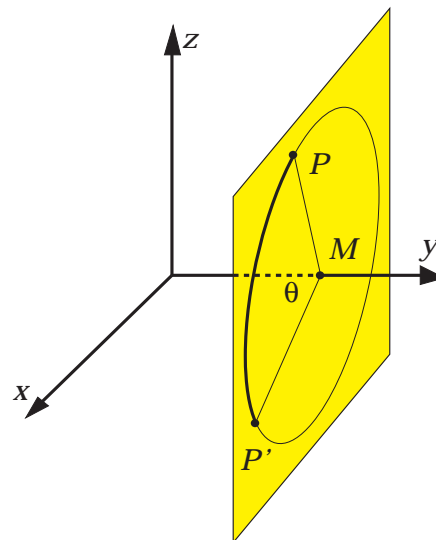


Análogamente, una rotación de ángulo θ alrededor del eje y , en sentido positivo, queda descrita por las

$$\text{ecuaciones } \begin{cases} x' = x \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta \\ y' = y \\ z' = -x \operatorname{sen}\theta + z \cos\theta \end{cases}$$

$$\text{de modo que su matriz asociada es: } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ahora quedan fijos en la rotación los puntos del eje y , es decir, los puntos de coordenadas $(0, y, 0)$.

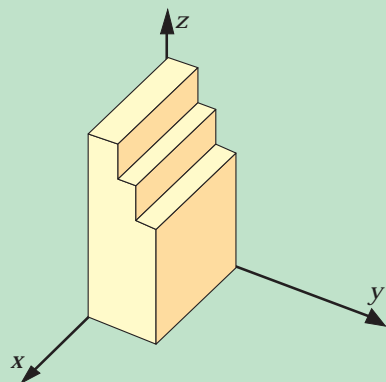


¿Cuáles son las ecuaciones y la matriz asociada a una rotación alrededor del eje x en sentido positivo? ¿Cuáles son los puntos que deja fijos esta rotación?

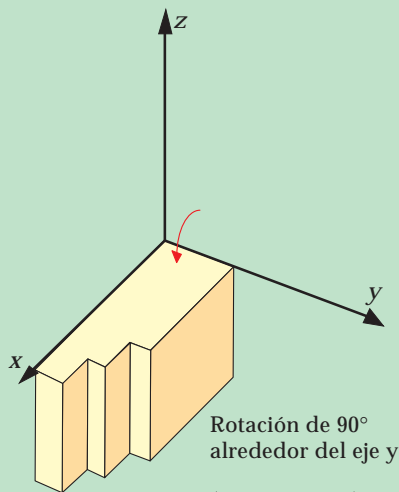
Los helicópteros usan aspas giratorias para propulsarse, sustentarse y gobernarse.



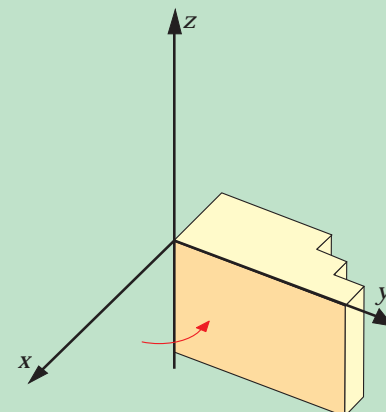
La multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones. Si A y B son las matrices asociadas a las transformaciones T_1 y T_2 , entonces la matriz BA está asociada a la transformación $T_2 \circ T_1$. En el plano la composición de rotaciones es conmutativa, mas en el espacio no lo es como se muestra en el ejemplo siguiente. Por ende, la multiplicación de matrices no es conmutativa.



Posición original del objeto

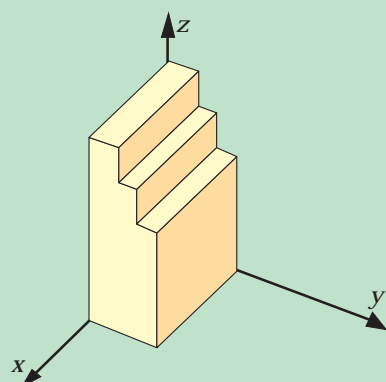
Rotación de 90°
alrededor del eje y

$$\text{Matriz asociada } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

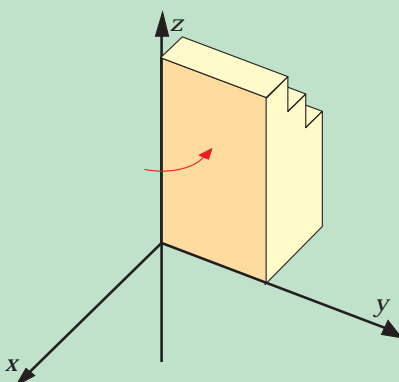
Rotación de 90°
alrededor del eje z

$$\text{Matriz asociada } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

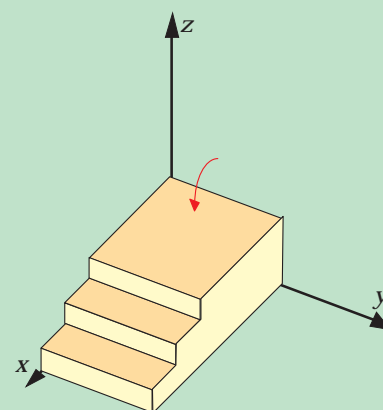
$$\text{La matriz asociada a la rotación compuesta es } BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Posición original del objeto

Rotación de 90°
alrededor del eje z

$$\text{Matriz asociada } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación de 90°
alrededor del eje y

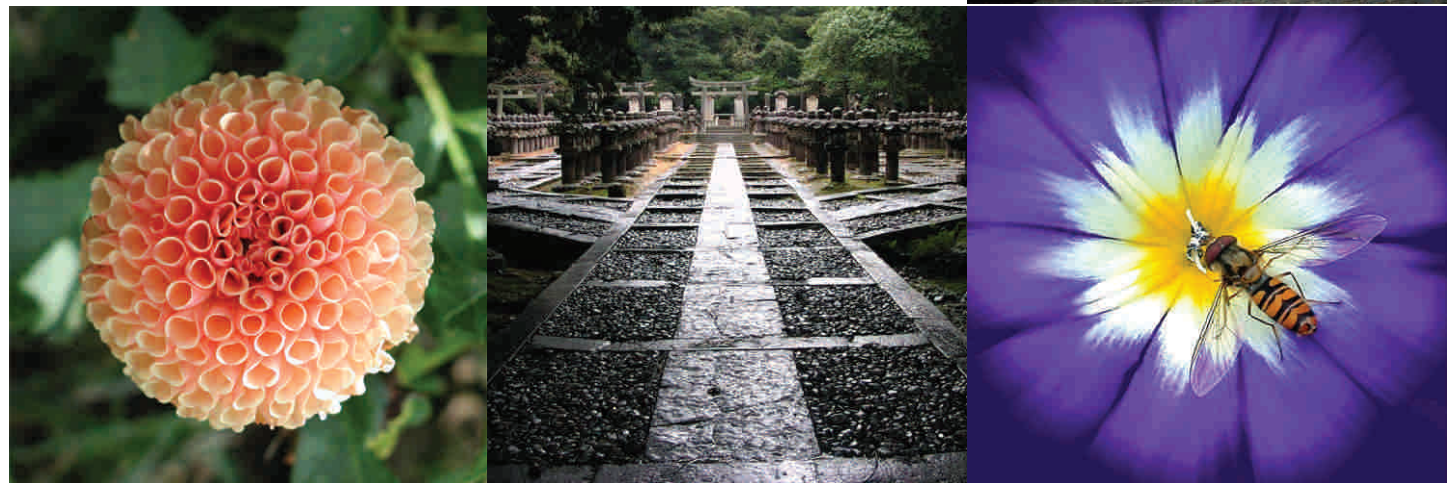
$$\text{Matriz asociada } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz asociada a la rotación compuesta es } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que las posiciones finales del objeto son diferentes y también lo son los productos AB y BA.

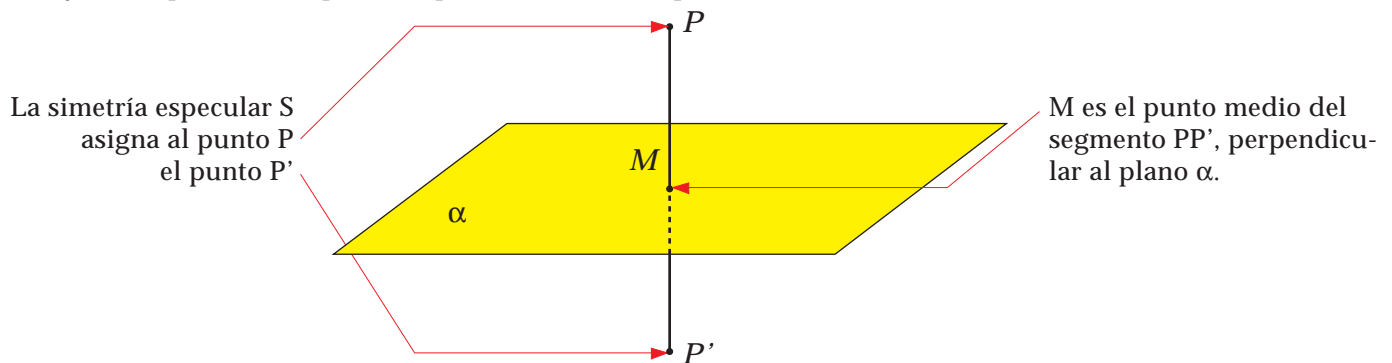
Simetría

La simetría se encuentra en múltiples manifestaciones de la naturaleza, el arte, la ciencia y la arquitectura.



Simetrías especulares

Una simetría especular respecto a un plano α , es una transformación del espacio tridimensional en sí mismo que refleja cada punto P respecto al plano α , llamado plano de simetría.



En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una simetría especular respecto al plano xy transforma cada punto P , de coordenadas (x, y, z) , al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el punto P' , de coordenadas (x', y', z') , asociado a la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$

La matriz asociada a la transformación es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

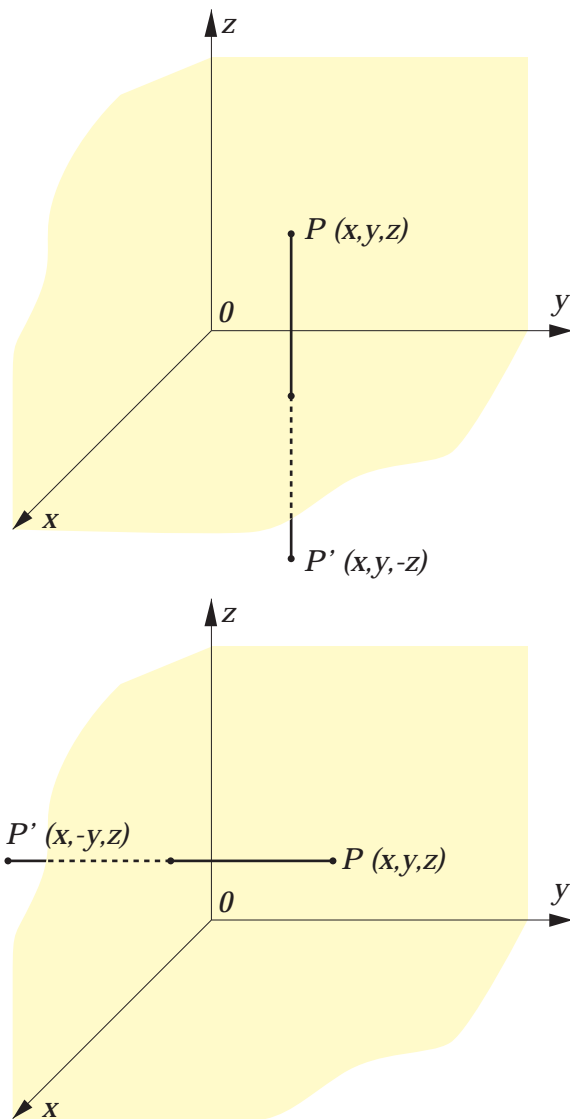
Observa que los puntos del plano xy , o sea, los puntos de coordenadas $(x, y, 0)$, quedan fijos en la simetría, puesto que:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una simetría especular respecto al plano xz transforma cada punto de coordenadas (x, y, z) , con matriz asociada $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el punto de coordenadas (x', y', z') , asociado a la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$ y la matriz asociada a la transformación es:

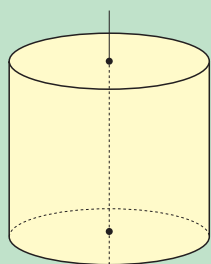
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, los puntos que la simetría deja fijos son los del plano xz , o sea, los puntos de coordenadas $(x, 0, z)$.

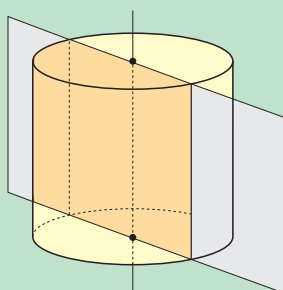


INTERESANTE

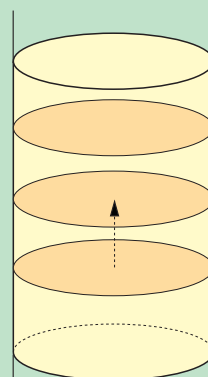
Si consideramos un cilindro, sus simetrías (dejan invariante el cilindro) son de cuatro tipos:



Simetría rotacional alrededor de su eje (los puntos del eje quedan fijos).

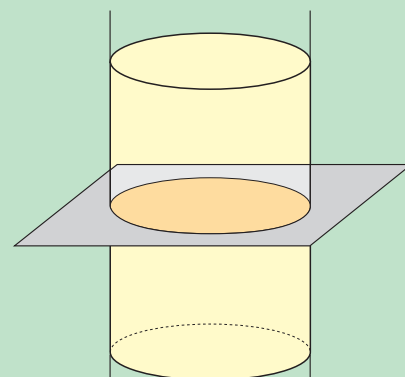


Simetría especular respecto de cualquier plano que contenga al eje (los puntos del plano quedan fijos).



Traslación paralela al eje (no tiene puntos fijos).

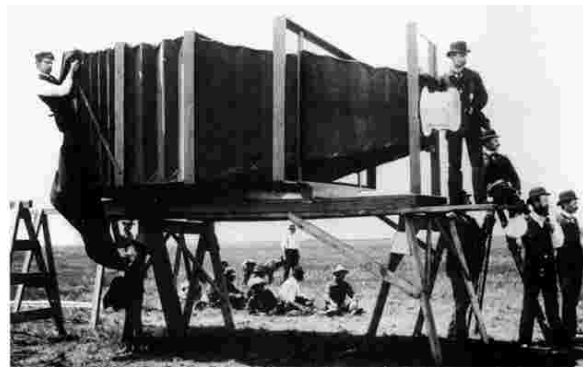
Cilindro infinito.



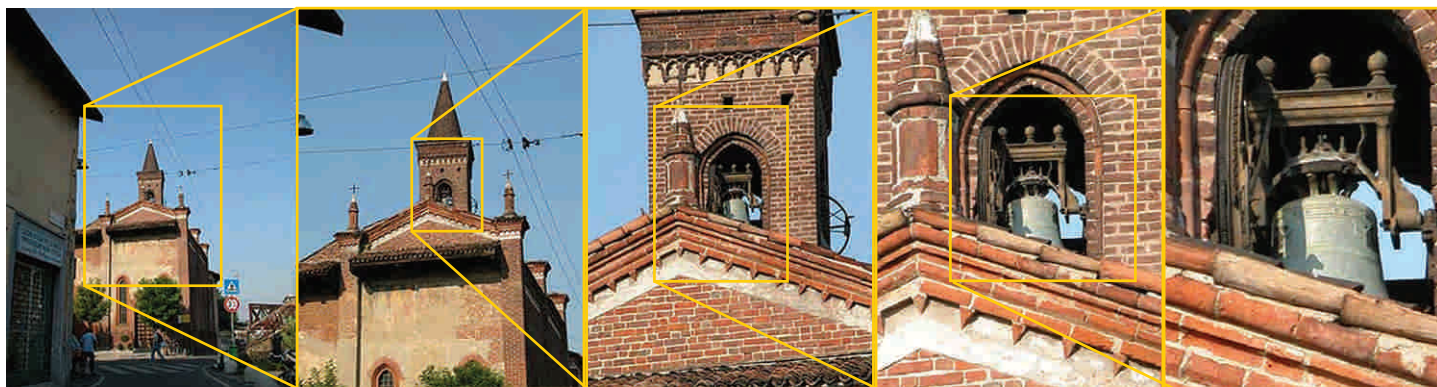
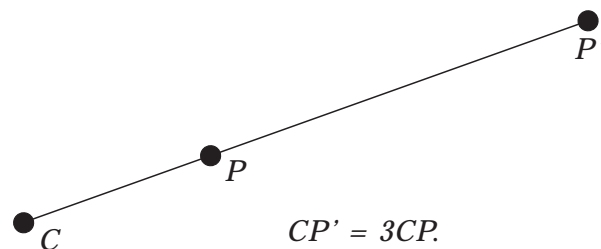
Simetría especular respecto de cualquier plano perpendicular al eje. Si el cilindro es finito sólo hay una de éstas, con el plano perpendicular al eje que pasa por su "punto medio".

Homotecia

Las homotecias son un tipo de transformaciones que alteran el tamaño de las figuras, pero conducen a otras “semejantes” (con la misma “forma” original). Dado un punto fijo C y un número real $k > 0$, $k \neq 1$, se llama homotecia de centro C y razón k , a la transformación que a todo punto P le hace corresponder el punto P' , situado sobre la recta CP , tal que $CP' = k CP$.



Cámara mamut (1900). Creada por George Lawrence para la toma de fotografías gigantes.



El zoom es uno de los instrumentos más poderosos para crear efectos en una imagen, gracias a un objetivo especial que permite aumentar o disminuir la imagen y modificar el ángulo de visión.

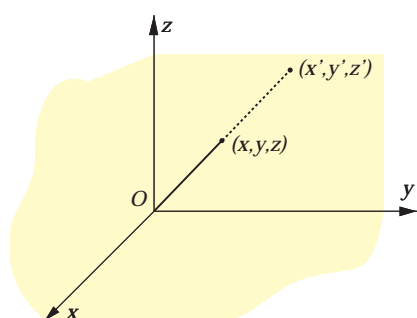
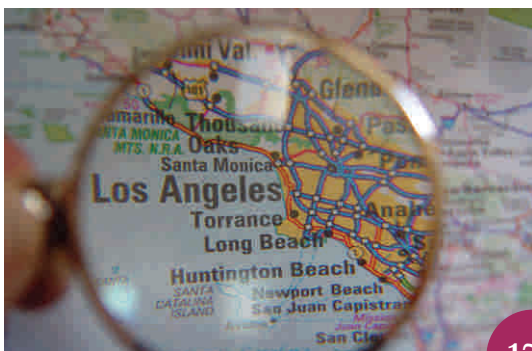
En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una homotecia de centro O y razón $k \neq 1$, transforma

cada punto de coordenadas (x, y, z) , al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en el punto de coordenadas (x', y', z') ,

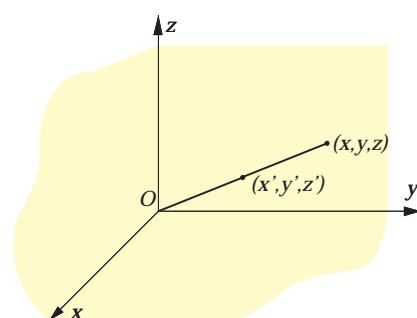
al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$ y la matriz asociada a la transforma-

ción es $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, puesto que $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

Si $0 < k < 1$, entonces la transformación produce una contracción (las distancias se comprimen por un factor k); y si $k > 1$, entonces se produce una dilatación (las distancias se estiran por un factor k).



Homotecia de razón $k > 1$



Homotecia de razón $0 < k < 1$



Matemática Maravillosa

Matrices y aplicaciones



La presentación de las películas de la trilogía Matrix, toma como imagen códigos que contienen un mensaje sólo conocido por sus autores. El resultado final de dichos códigos es el nombre de la película. The Matrix (1999), The Matrix Reloaded (2002), The Matrix Revolutions (2004).

Matrices y códigos

Los códigos secretos han acompañado a la humanidad desde épocas remotas. Se emplean diferentes términos, para indicar que un mensaje ha sido escrito de manera que en principio sólo el destinatario lo pueda leer. Entre las palabras utilizadas para ello están: codificación, cifrado, encriptamiento,...

Se define la criptografía (del griego *kryptos*, "escondido", y *graphein*, "escribir") como el arte de enmascarar los mensajes con signos convencionales que sólo cobran sentido a la luz de una clave secreta.

Para mayor precisión, señalemos que se llama cifrado (codificación o transformación criptográfica) a una transformación del texto original que lo convierte en el llamado texto cifrado o criptograma. Análogamente, se llama descifrado a la transformación que permite recuperar el texto original a partir del texto cifrado.



SABÍAS QUE...



Ya en el año 450 a.C. los espartanos de Grecia enviaban mensajes codificados. Para ello enrollaban una banda de cuero o cinturón sobre un cilindro, se escribía el mensaje y al desenrollar la banda de cuero ésta parecía que sólo estaba adornada con marcas inocentes. Sin embargo, si el destinatario del mensaje arrollaba nuevamente la banda alrededor de un cilindro similar al utilizado cuando se escribió dicho mensaje, éste podía ser leído sin dificultad. Este método es un sistema de codificación por transposición.

En el cifrado por sustitución, cada letra o grupo de letras es reemplazada por una letra o grupo de letras. Uno de los más antiguos cifrados es el "Cifrado de César", atribuido a Julio César, quien sustituyó cada letra por la que ocupa tres puestos más allá en el alfabeto. Con ese método, *a* se convierte en *D*, *b* en *E*, *c* en *F*,..., y *z* en *C*.

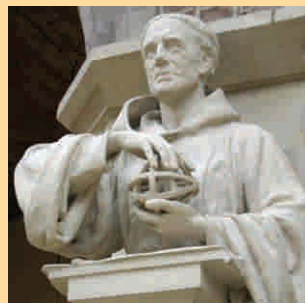
Una técnica de codificación por sustitución fue utilizada por el insigne escritor estadounidense Edgar Allan Poe (1809-1849) en su célebre narración *El escarabajo de oro*. También este tipo de técnica aparece con frecuencia en diarios y pasatiempos en los cuales se le propone al lector la solución de un criptograma.

En el siglo XIII, Roger Bacon (1214-1294) describió varios métodos de codificación.

De trascendental importancia, durante la II Guerra Mundial, fue el hecho de que los estadounidenses lograran descifrar el código naval japonés JN25 y los ingleses hiciesen lo propio con la máquina alemana *Enigma*.

Actualmente se utilizan sofisticadas técnicas de encriptamiento de mensajes las cuales se basan en las propiedades de los números primos.

Uno de los sistemas modernos para encriptar mensajes es el criptosistema de clave pública. Uno de éstos es el sistema RSA (en honor de sus creadores los matemáticos Rivest, Shamir y Adler), el cual se basa en el hecho de que no existe una forma eficiente de factorizar números que sean productos de dos números primos grandes.



La máquina *Enigma* era un dispositivo para codificar mensajes empleado por los alemanes en la II Guerra Mundial.

El artefacto consistía de las siguientes partes:

- Un teclado con 26 letras
- Un tablero con 26 letras
- 3 ruedas con 26 letras cada una sobre un eje

Luego de la obtención por parte de los aliados de algunas de estas máquinas, el equipo polaco conformado por Jerzy Rozyski, Henryk Zygalski y Marian Rejewski, dedujeron el código. A raíz de esto, los alemanes complicaron el proceso mediante una doble codificación. Este nuevo proceso fue decodificado, en 1941, por el equipo de Bletchley Park encabezado por el matemático Alan Turing (Inglaterra, 1912-1954).

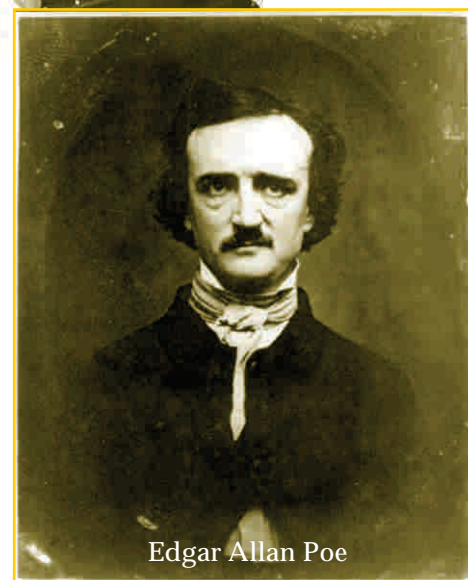


En la obra de Poe *El escarabajo de oro* se señala:

Y al llegar aquí, Legrand, habiendo calentado de nuevo el pergamino, lo sometió a mi examen. Los caracteres siguientes aparecían de manera toscamente trazada, en color rojo, entre la calavera y la cabra:

53††+305))6*;4826)4†.)4†);806*,48+8¶(60))85;1† (:;†*8
 +83(88)5*+;46(;88*96*?;8)* † (:485);5*+2:* † (:4956*2(5*—
 4)8¶8*;4069285);6+8)4††;1(†9;48081;8:8†1;48+85;4)485
 +528806*81(†9;48;(88;4(†?34;48)4†;161;:188; †?;

—Pero—dije, devolviéndole la tira—sigo estando tan a oscuras como antes. Si todas las joyas de Golconda esperasen de mí la solución de este enigma, estoy en absoluto seguro de que sería incapaz de obtenerlas.



El descifrador partió del supuesto de que el texto original estaba escrito en idioma inglés.

Ahora bien, la letra que se encuentra con mayor frecuencia en ese idioma, así como en el castellano, el alemán y el francés, es la e. Después, la serie en inglés es la siguiente: a o i d h n r s t u y c f g l m w b k p q x z.

Del criptograma se obtiene la siguiente tabla, en la cual aparecen en la primera fila los caracteres presentes en el mensaje codificado y en la segunda la frecuencia de aparición de éstos.

8	;	4	†)	*	5	6	(+	1	0	9	2	:	3	?	¶	—
33	26	19	16	16	13	12	11	10	8	8	6	5	5	4	4	3	2	1

Luego, el 8 muy probablemente debe ser la letra e.

Además, el descifrado que se va logrando usando la tabla anterior conjuntamente con los conocimientos idiomáticos de la lengua inglesa, conduce en una etapa intermedia del proceso a esta otra tabla, en la cual en la fila superior están los caracteres que aparecen en el criptograma, y en la inferior el símbolo que les corresponde en el mensaje original.

5	+	8	3	4	6	*	†	(;	?
a	d	e	g	h	i	n	o	r	t	u

Códigos más complejos

Una técnica un poco más sofisticada consiste en el empleo del cifrado en dos pasos. Primero se le aplica al mensaje una sustitución, seguida luego de una transposición.

Para el primer paso consideremos el siguiente cifrado por sustitución:

Tabla N° 1

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

s	t	u	v	w	x	y	z	espacio	.	,
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Como vemos en la Tabla N° 1, a cada letra de nuestro alfabeto así como al espacio entre letras y a los signos de puntuación más usuales se les ha asignado un número. Esto matemáticamente corresponde a una función f , la cual además es biyectiva, por lo cual es posible efectuar el proceso inverso: pasar de los números a las letras o signos que ellos representan.

Así, por ejemplo, la palabra ORO quedaría codificada como 16 19 16.

Por su parte, 7 1 21 16 es la codificación de la palabra gato.

De aquí en adelante usaremos la notación matricial para representar las palabras. Lo anterior quedaría representado como se muestra a la derecha.

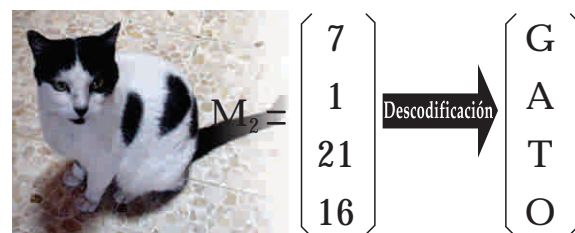
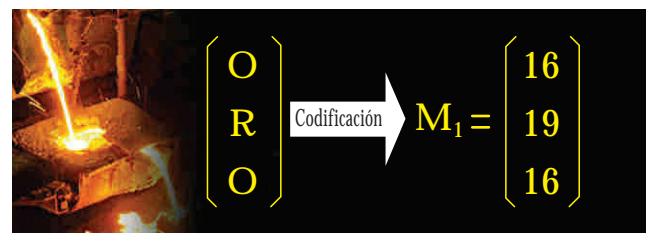
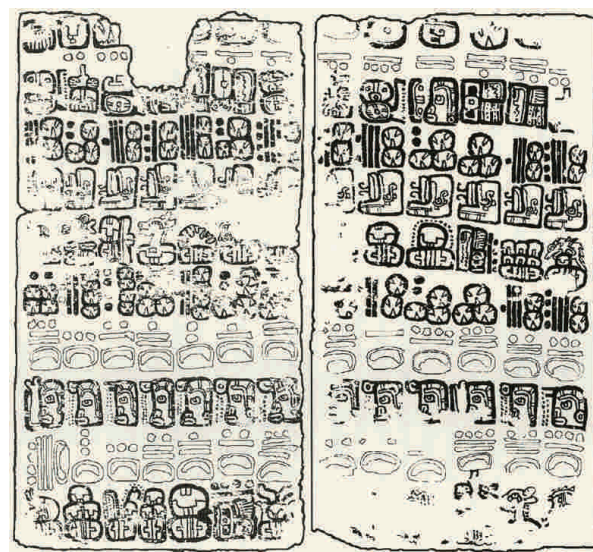
Pasemos ahora a un segundo paso o nivel de codificación, multiplicando por la izquierda (premultiplicando) la matriz M_i que representa al mensaje que queremos codificar, por una matriz C que llamaremos Matriz de Codificación.

C no puede ser cualquier matriz. C debe cumplir dos condiciones:

1. El número de columnas de C debe ser igual al número de filas de M_i .
2. Debe ser posible realizar el proceso inverso, la descodificación, para lo cual C debe poseer inversa. A la inversa C^{-1} la llamaremos Matriz de Descodificación.

La función f y la matriz C son las claves secretas que permiten codificar (y sus inversas descodificar) cualquier mensaje.

Consideremos el mensaje ACA



$$\begin{pmatrix} A \\ C \\ A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Codificación}} M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ como matriz de codificación, se tiene $CM_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Así obtenemos que: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{luego de codificado o cifrado por transposición produce:}} \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

En términos alfabéticos, aplicando la Tabla N° 1, CM_3 es ISP.

Observe que C posee 3 columnas, es igual al número de filas de M_1 . Además se tiene que:

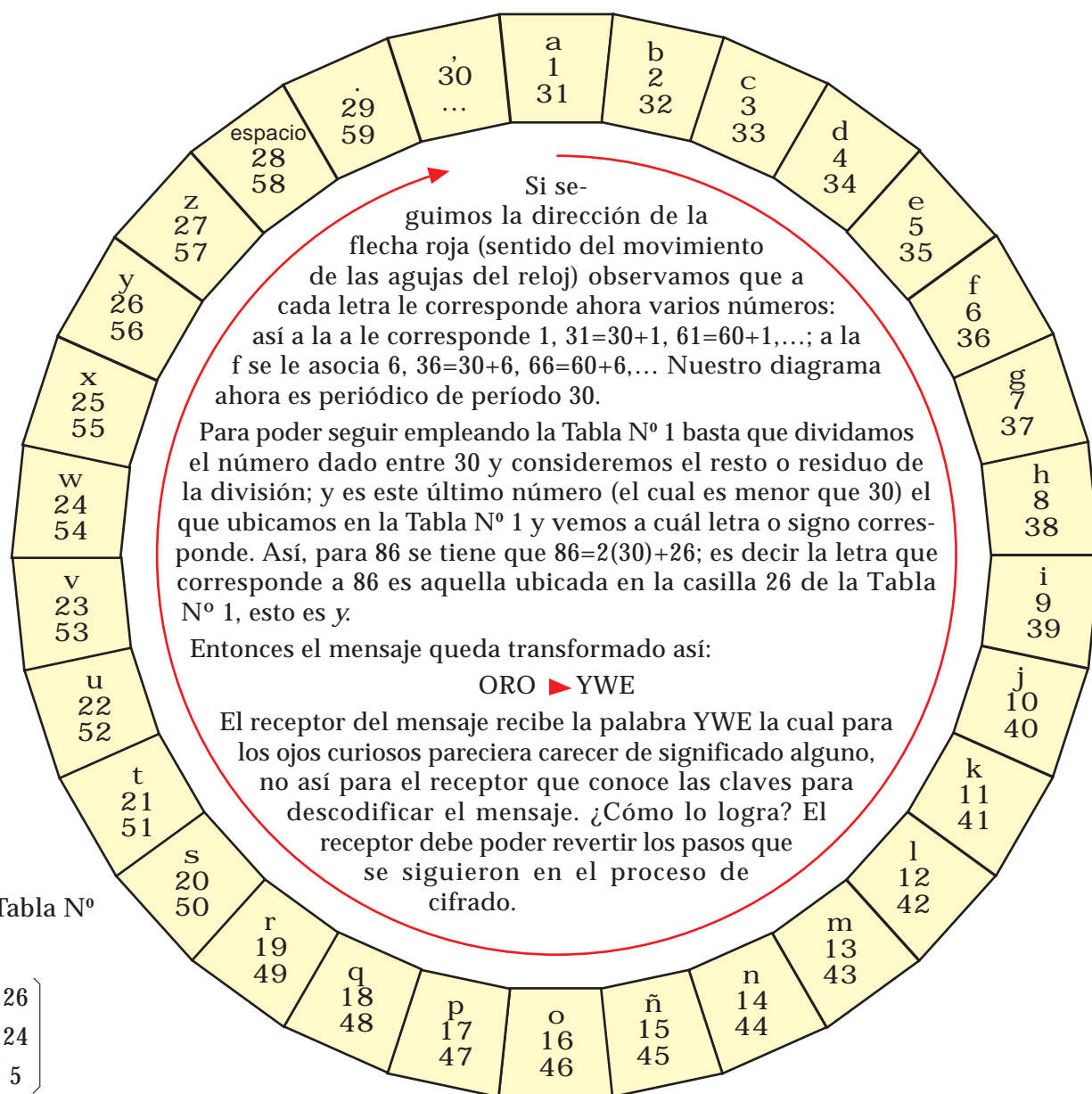
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ es la inversa de C .

Volvamos al mensaje ORO, entonces $CM_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 204 \\ 185 \end{pmatrix}$

Si queremos reescribir CM_1 en términos alfabéticos, nos tropezamos con el inconveniente de que todas las entradas de la matriz CM_1 resultaron números mayores que 30 y, en consecuencia, es inaplicable la Tabla N° 1. ¿A qué letra corresponde, por ejemplo, 86? ¿Qué modificaciones debemos hacerle a nuestro proceso para solventar esta situación?

Si observamos la Tabla N° 1, y en lugar de mirar una disposición lineal como la allí mostrada la pensamos como un diagrama cerrado, haciendo coincidir los dos extremos, obtenemos una representación como la que se presenta a continuación:



Empleando la Tabla N° 1 se tiene:

$$\begin{pmatrix} Y \\ W \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como queremos descodificar el mensaje recibido hemos de emplear la matriz C^{-1} :

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 79 \\ -44 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 16 & O \\ \hline 79=2(30)+19 & R \\ \hline -44 & ? \\ \hline \end{array}$$

¿A cuál letra corresponde -44?

$-44=-2(30)+16$, es decir que hemos realizado dos vueltas completas en el sentido opuesto a las agujas del reloj, y de seguidas, hemos avanzado 16 casillas en el sentido de las agujas del reloj; pero 16 corresponde a la letra O. La palabra descodificada entonces es ORO, como era de esperarse.

Matrices y números complejos

En el conjunto de los puntos P del plano, de coordenadas (x,y) , podemos definir las operaciones de adición y multiplicación como se indica a continuación:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad (a,b) (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Estas operaciones cumplen propiedades similares a las operaciones de adición y multiplicación de los números reales: asociatividad, conmutatividad y existencia de elemento neutro para ambas operaciones; existencia de opuesto aditivo y de inverso multiplicativo (si es distinto de $(0,0)$); y distributividad de la multiplicación respecto a la adición.

Este conjunto de puntos con estas dos operaciones es lo que se conoce como el cuerpo de los números complejos. El punto $(0,0)$ es el elemento neutro para la adición, mientras que el punto $(1,0)$ lo es para la multiplicación.

Los números complejos los hemos representado como pares de números de la forma (a,b) . Otra manera de representarlos es utilizando la forma binómica $a+bi$, donde i es la unidad imaginaria, solución de la ecuación x^2-1 (que no tiene solución real) y está dada por $i = (0,1)$.

Existen otras maneras de representar los números complejos.

Una de ellas es utilizando las matrices cuadradas de orden 2.

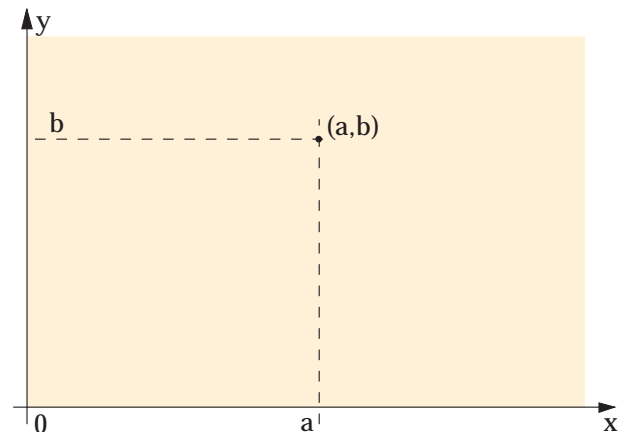
Si identificamos cada número complejo (a,b) con el vector columna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y usamos las operaciones con matrices podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considerando la matriz identidad y la matriz de rotación de 90° en sentido antihorario $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la expresión anterior la podemos reescribir:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, todo número complejo los podemos escribir como el transformado del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, y así podemos tomar esta matriz como una representación del número complejo.



INTERESANTE

Con esta identificación la unidad imaginaria se representa por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos esta matriz por sí misma, resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

De esta manera la matriz A es solución de la "ecuación matricial" $X^2 = -I$

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Un comerciante le dice a un empleado que le cambie en el banco 10 000 bolívares en 150 monedas de Bs 100 y Bs 20.

Denotando por x el número de monedas de Bs 100 requeridas y por y el número de monedas de Bs 20, este simple problema se traduce en resolver las 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 100x + 20y = 10\,000 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

En general, tenemos que un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se expresa por:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas; x e y son las incógnitas y a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 y c_2 son conocidos.

Consideremos el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde tenemos una fuente de 20V y tres resistencias: de 1 ohm, 2 ohmios y de 4 ohmios. De acuerdo a las leyes de Kirchoff, se tienen las siguientes relaciones lineales entre las intensidades.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 2i_1 + 4i_2 = 20 \\ 2i_1 + i_3 = 20 \end{cases}$$

Esto da un sistema lineal con 3 incógnitas.

Forma matricial

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$AX = X'$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Al escribir un sistema de ecuaciones de la forma $AX=X'$, podemos pensar a la matriz A como una transformación o función que transforma el vector X en el vector X' .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

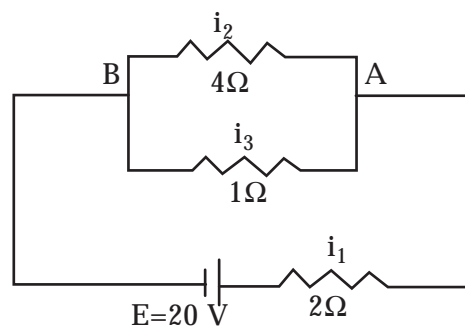
$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma matricial

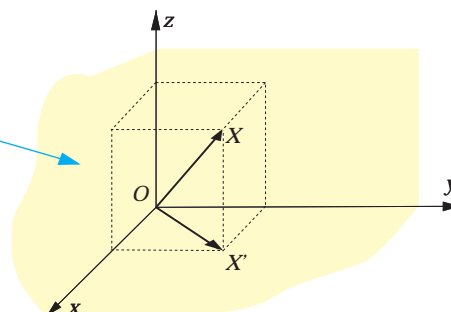
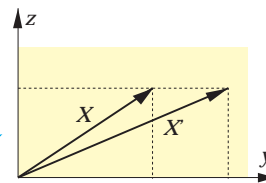
$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$AX = C$$



A es una matriz
 X matriz de incógnitas
 X' matriz conocida





Matemática Maravillosa

Matrices y aplicaciones



La presentación de las películas de la trilogía Matrix, toma como imagen códigos que contienen un mensaje sólo conocido por sus autores. El resultado final de dichos códigos es el nombre de la película. The Matrix (1999), The Matrix Reloaded (2002), The Matrix Revolutions (2004).

Matrices y códigos

Los códigos secretos han acompañado a la humanidad desde épocas remotas. Se emplean diferentes términos, para indicar que un mensaje ha sido escrito de manera que en principio sólo el destinatario lo pueda leer. Entre las palabras utilizadas para ello están: codificación, cifrado, encriptamiento,...

Se define la criptografía (del griego *kryptos*, "escondido", y *graphein*, "escribir") como el arte de enmascarar los mensajes con signos convencionales que sólo cobran sentido a la luz de una clave secreta.

Para mayor precisión, señalemos que se llama cifrado (codificación o transformación criptográfica) a una transformación del texto original que lo convierte en el llamado texto cifrado o criptograma. Análogamente, se llama descifrado a la transformación que permite recuperar el texto original a partir del texto cifrado.



SABÍAS QUE...



Ya en el año 450 a.C. los espartanos de Grecia enviaban mensajes codificados. Para ello enrollaban una banda de cuero o cinturón sobre un cilindro, se escribía el mensaje y al desenrollar la banda de cuero ésta parecía que sólo estaba adornada con marcas inocentes. Sin embargo, si el destinatario del mensaje arrollaba nuevamente la banda alrededor de un cilindro similar al utilizado cuando se escribió dicho mensaje, éste podía ser leído sin dificultad. Este método es un sistema de codificación por transposición.

En el cifrado por sustitución, cada letra o grupo de letras es reemplazada por una letra o grupo de letras. Uno de los más antiguos cifrados es el "Cifrado de César", atribuido a Julio César, quien sustituyó cada letra por la que ocupa tres puestos más allá en el alfabeto. Con ese método, *a* se convierte en *D*, *b* en *E*, *c* en *F*,..., y *z* en *C*.

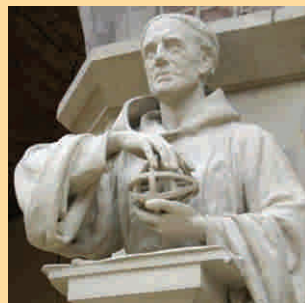
Una técnica de codificación por sustitución fue utilizada por el insigne escritor estadounidense Edgar Allan Poe (1809-1849) en su célebre narración *El escarabajo de oro*. También este tipo de técnica aparece con frecuencia en diarios y pasatiempos en los cuales se le propone al lector la solución de un criptograma.

En el siglo XIII, Roger Bacon (1214-1294) describió varios métodos de codificación.

De trascendental importancia, durante la II Guerra Mundial, fue el hecho de que los estadounidenses lograran descifrar el código naval japonés JN25 y los ingleses hiciesen lo propio con la máquina alemana *Enigma*.

Actualmente se utilizan sofisticadas técnicas de encriptamiento de mensajes las cuales se basan en las propiedades de los números primos.

Uno de los sistemas modernos para encriptar mensajes es el criptosistema de clave pública. Uno de éstos es el sistema RSA (en honor de sus creadores los matemáticos Rivest, Shamir y Adler), el cual se basa en el hecho de que no existe una forma eficiente de factorizar números que sean productos de dos números primos grandes.



La máquina *Enigma* era un dispositivo para codificar mensajes empleado por los alemanes en la II Guerra Mundial.

El artefacto consistía de las siguientes partes:

- Un teclado con 26 letras
- Un tablero con 26 letras
- 3 ruedas con 26 letras cada una sobre un eje

Luego de la obtención por parte de los aliados de algunas de estas máquinas, el equipo polaco conformado por Jerzy Rozyc-ki, Henryk Zygalski y Marian Rejewski, dedujeron el código. A raíz de esto, los alemanes complicaron el proceso mediante una doble codificación. Este nuevo proceso fue decodificado, en 1941, por el equipo de Bletchley Park encabezado por el matemático Alan Turing (Inglaterra, 1912-1954).

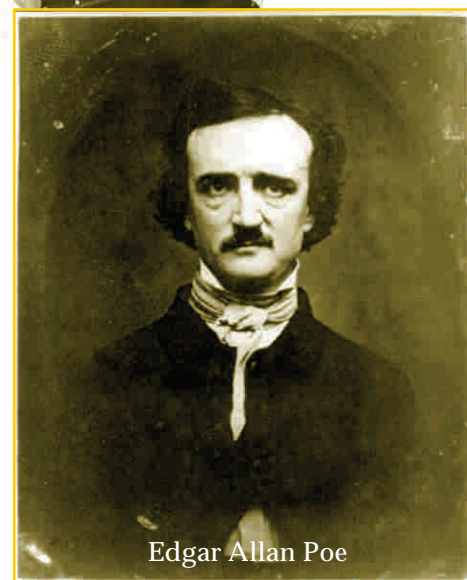


En la obra de Poe *El escarabajo de oro* se señala:

Y al llegar aquí, Legrand, habiendo calentado de nuevo el pergamino, lo sometió a mi examen. Los caracteres siguientes aparecían de manera toscamente trazada, en color rojo, entre la calavera y la cabra:

53‡‡+305))6*;4826)4‡.)4‡);806*;48+8¶(60))85;1‡ (:;‡*8
+83(88)5*+;46(;88*96*?;8)* ‡ (:485);5*+2:* ‡ (:4956*2(5*—
4)8¶8*;4069285);6+8)4‡‡;1(‡9;48081;8:8‡1;48+85;4)485
+528806*81(‡9;48;(88;4(‡?34;48)4‡;161;:188; ‡?;

—Pero—dije, devolviéndole la tira—sigo estando tan a oscuras como antes. Si todas las joyas de Golconda esperasen de mí la solución de este enigma, estoy en absoluto seguro de que sería incapaz de obtenerlas.



El descifrador partió del supuesto de que el texto original estaba escrito en idioma inglés.

Ahora bien, la letra que se encuentra con mayor frecuencia en ese idioma, así como en el castellano, el alemán y el francés, es la e. Después, la serie en inglés es la siguiente: a o i d h n r s t u y c f g l m w b k p q x z.

Del criptograma se obtiene la siguiente tabla, en la cual aparecen en la primera fila los caracteres presentes en el mensaje codificado y en la segunda la frecuencia de aparición de éstos.

8	;	4	‡)	*	5	6	(+	1	0	9	2	:	3	?	¶	—
33	26	19	16	16	13	12	11	10	8	8	6	5	5	4	4	3	2	1

Luego, el 8 muy probablemente debe ser la letra e.

Además, el descifrado que se va logrando usando la tabla anterior conjuntamente con los conocimientos idiomáticos de la lengua inglesa, conduce en una etapa intermedia del proceso a esta otra tabla, en la cual en la fila superior están los caracteres que aparecen en el criptograma, y en la inferior el símbolo que les corresponde en el mensaje original.

5	+	8	3	4	6	*	‡	(;	?
a	d	e	g	h	i	n	o	r	t	u

Códigos más complejos

Una técnica un poco más sofisticada consiste en el empleo del cifrado en dos pasos. Primero se le aplica al mensaje una sustitución, seguida luego de una transposición.

Para el primer paso consideremos el siguiente cifrado por sustitución:

Tabla N° 1

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

s	t	u	v	w	x	y	z	espacio	.	,
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Como vemos en la Tabla N° 1, a cada letra de nuestro alfabeto así como al espacio entre letras y a los signos de puntuación más usuales se les ha asignado un número. Esto matemáticamente corresponde a una función f , la cual además es biyectiva, por lo cual es posible efectuar el proceso inverso: pasar de los números a las letras o signos que ellos representan.

Así, por ejemplo, la palabra ORO quedaría codificada como 16 19 16.

Por su parte, 7 1 21 16 es la codificación de la palabra gato.

De aquí en adelante usaremos la notación matricial para representar las palabras. Lo anterior quedaría representado como se muestra a la derecha.

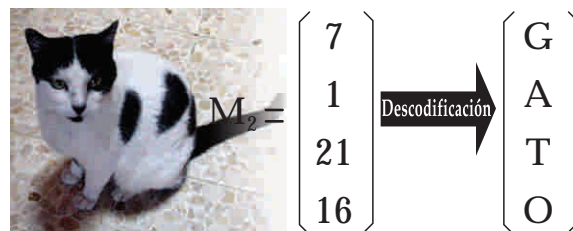
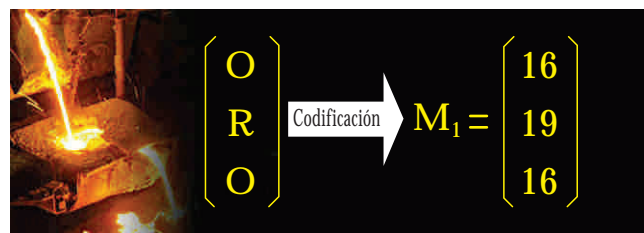
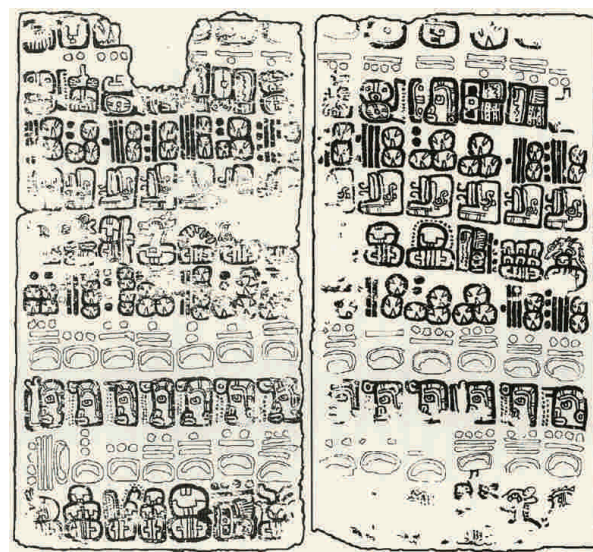
Pasemos ahora a un segundo paso o nivel de codificación, multiplicando por la izquierda (premultiplicando) la matriz M_i que representa al mensaje que queremos codificar, por una matriz C que llamaremos Matriz de Codificación.

C no puede ser cualquier matriz. C debe cumplir dos condiciones:

1. El número de columnas de C debe ser igual al número de filas de M_i .
2. Debe ser posible realizar el proceso inverso, la descodificación, para lo cual C debe poseer inversa. A la inversa C^{-1} la llamaremos Matriz de Descodificación.

La función f y la matriz C son las claves secretas que permiten codificar (y sus inversas descodificar) cualquier mensaje.

Consideremos el mensaje ACA



$$\begin{pmatrix} A \\ C \\ A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Codificación}} M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ como matriz de codificación, se tiene $CM_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Así obtenemos que: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{luego de codificado o cifrado por transposición produce:}} \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

En términos alfabéticos, aplicando la Tabla N° 1, CM_3 es ISP.

Observe que C posee 3 columnas, es igual al número de filas de M_1 . Además se tiene que:

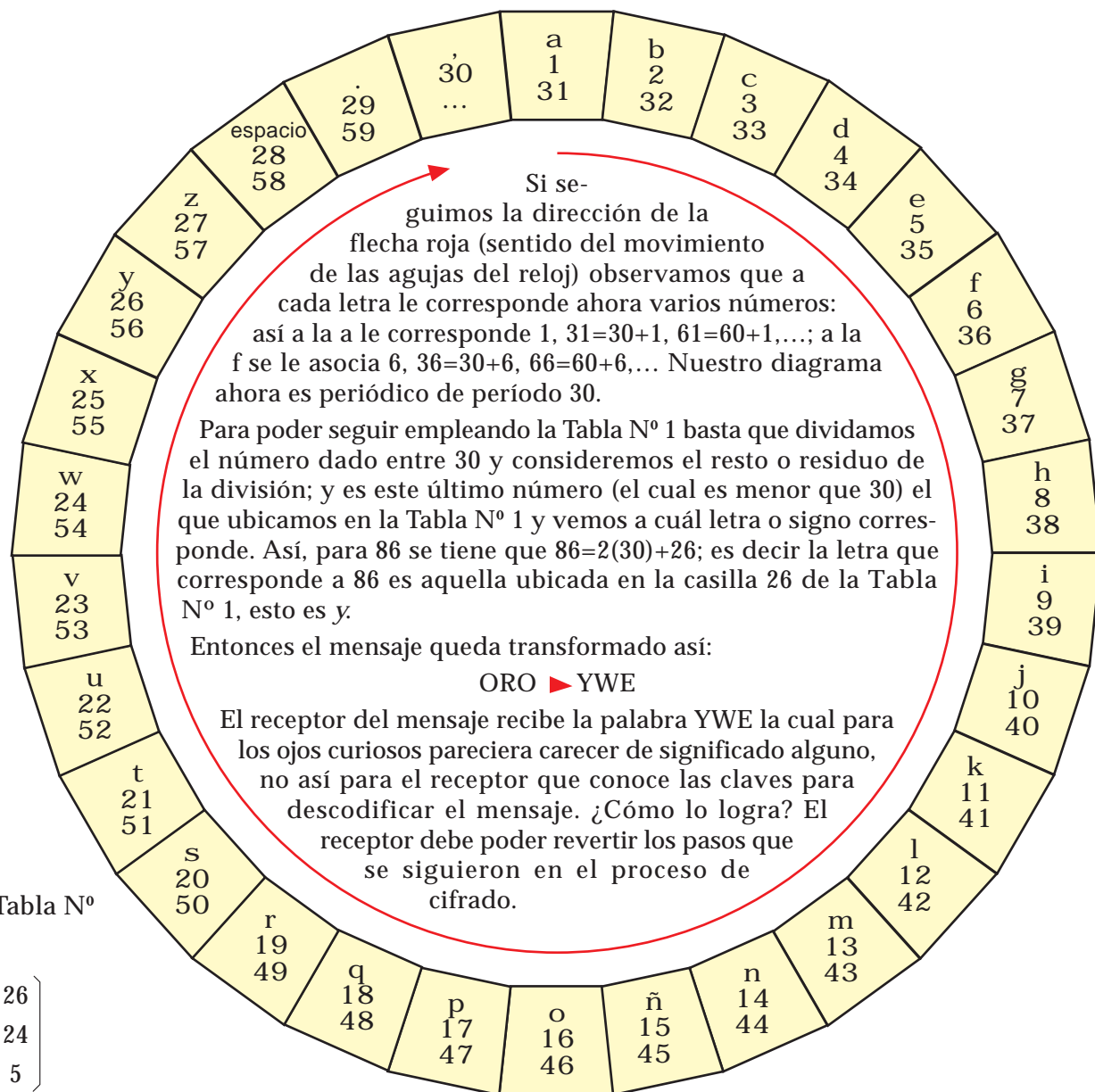
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ es la inversa de C .

Volvamos al mensaje ORO, entonces $CM_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 204 \\ 185 \end{pmatrix}$

Si queremos reescribir CM_1 en términos alfabéticos, nos tropezamos con el inconveniente de que todas las entradas de la matriz CM_1 resultaron números mayores que 30 y, en consecuencia, es inaplicable la Tabla N° 1. ¿A qué letra corresponde, por ejemplo, 86? ¿Qué modificaciones debemos hacerle a nuestro proceso para solventar esta situación?

Si observamos la Tabla N° 1, y en lugar de mirar una disposición lineal como la allí mostrada la pensamos como un diagrama cerrado, haciendo coincidir los dos extremos, obtenemos una representación como la que se presenta a continuación:



Empleando la Tabla N° 1 se tiene:

$$\begin{pmatrix} Y \\ W \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como queremos descodificar el mensaje recibido hemos de emplear la matriz C^{-1} :

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 79 \\ -44 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 16 & O \\ \hline 79=2(30)+19 & R \\ \hline -44 & ? \\ \hline \end{array}$$

¿A cuál letra corresponde -44?

$-44=-2(30)+16$, es decir que hemos realizado dos vueltas completas en el sentido opuesto a las agujas del reloj, y de seguidas, hemos avanzado 16 casillas en el sentido de las agujas del reloj; pero 16 corresponde a la letra O. La palabra descodificada entonces es ORO, como era de esperarse.

Matrices y números complejos

En el conjunto de los puntos P del plano, de coordenadas (x,y) , podemos definir las operaciones de adición y multiplicación como se indica a continuación:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad (a,b) (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Estas operaciones cumplen propiedades similares a las operaciones de adición y multiplicación de los números reales: asociatividad, conmutatividad y existencia de elemento neutro para ambas operaciones; existencia de opuesto aditivo y de inverso multiplicativo (si es distinto de $(0,0)$); y distributividad de la multiplicación respecto a la adición.

Este conjunto de puntos con estas dos operaciones es lo que se conoce como el cuerpo de los números complejos. El punto $(0,0)$ es el elemento neutro para la adición, mientras que el punto $(1,0)$ lo es para la multiplicación.

Los números complejos los hemos representado como pares de números de la forma (a,b) . Otra manera de representarlos es utilizando la forma binómica $a+bi$, donde i es la unidad imaginaria, solución de la ecuación x^2-1 (que no tiene solución real) y está dada por $i = (0,1)$.

Existen otras maneras de representar los números complejos.

Una de ellas es utilizando las matrices cuadradas de orden 2.

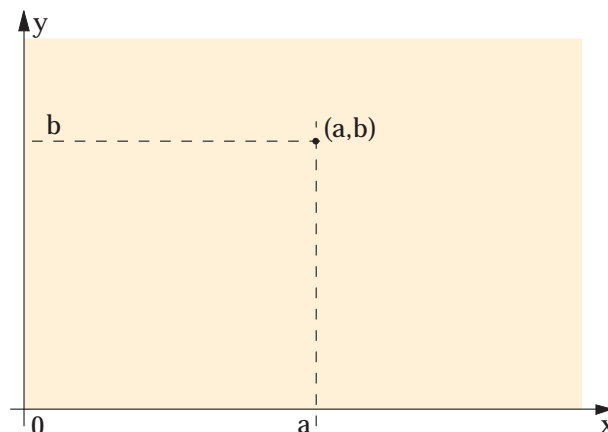
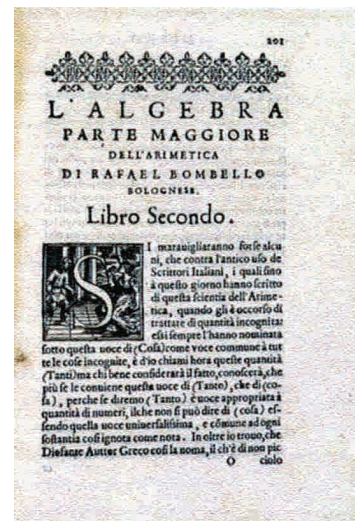
Si identificamos cada número complejo (a,b) con el vector columna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y usamos las operaciones con matrices podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considerando la matriz identidad y la matriz de rotación de 90° en sentido antihorario $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la expresión anterior la podemos reescribir:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, todo número complejo los podemos escribir como el transformado del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, y así podemos tomar esta matriz como una representación del número complejo.



INTERESANTE

Con esta identificación la unidad imaginaria se representa por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos esta matriz por sí misma, resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

De esta manera la matriz A es solución de la "ecuación matricial" $X^2 = -I$

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Un comerciante le dice a un empleado que le cambie en el banco 10 000 bolívares en 150 monedas de Bs 100 y Bs 20.

Denotando por x el número de monedas de Bs 100 requeridas y por y el número de monedas de Bs 20, este simple problema se traduce en resolver las 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 100x + 20y = 10\,000 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

En general, tenemos que un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se expresa por:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas; x e y son las incógnitas y a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 y c_2 son conocidos.

Consideremos el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde tenemos una fuente de 20V y tres resistencias: de 1 ohm, 2 ohmios y de 4 ohmios. De acuerdo a las leyes de Kirchoff, se tienen las siguientes relaciones lineales entre las intensidades.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 2i_1 + 4i_2 = 20 \\ 2i_1 + i_3 = 20 \end{cases}$$

Esto da un sistema lineal con 3 incógnitas.

Forma matricial

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$AX = X'$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Al escribir un sistema de ecuaciones de la forma $AX = X'$, podemos pensar a la matriz A como una transformación o función que transforma el vector X en el vector X' .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

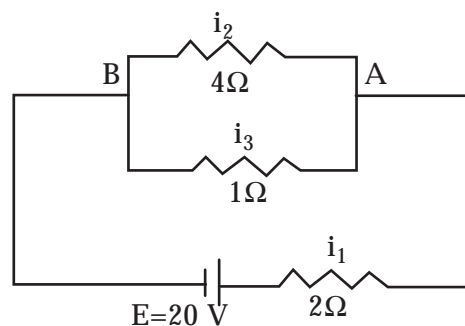
$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma matricial

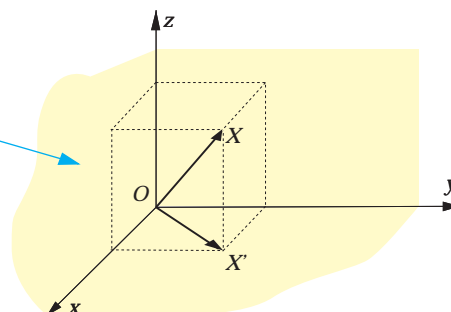
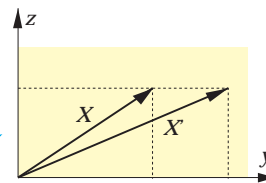
$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

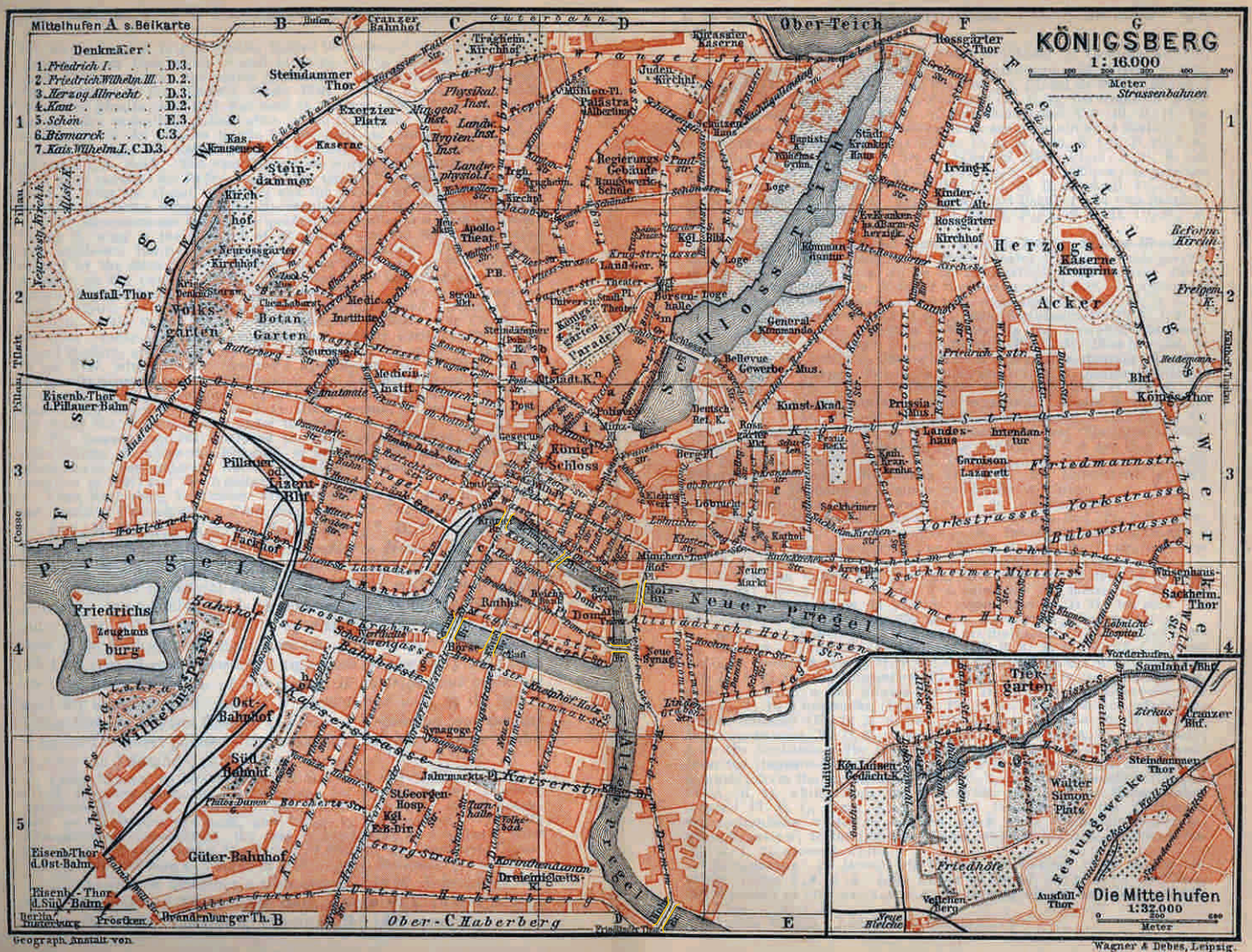
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$AX = C$$



A es una matriz
 X matriz de incógnitas
 X' matriz conocida



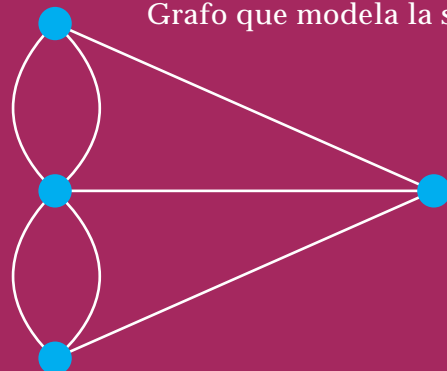


La antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) ubicada en lo que era Prusia Oriental, se encuentra atravesada por el río Pregel (cuyo nombre actual es Pregolya). La ciudad es famosa por sus puentes, ya que cuenta con 7 que unen ambas márgenes del río Pregel con dos de sus islas, tal como se puede ver en el plano de arriba.

Se dice que los habitantes de la ciudad se entretenían tratando de encontrar una ruta para pasear con la condición de cruzar cada uno de los siete puentes y hacerlo sólo una vez. Como habían intentado hacerlo infructuosamente la mayoría pensaba que tal paseo era imposible.

Euler resolvió el problema representando la situación mediante un modelo gráfico. La solución dada en 1736, mostraba la imposibilidad de cruzar los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo puente.

Grafo que modela la situación



Matrices y grafos

Este tipo de objeto matemático se conoce con el nombre de *grafo*: a los puntos se les llama *vértices* y *aristas* a las líneas que los unen.

Los puntos azules en el grafo (vértices) representan las dos islas y las dos orillas del río; mientras que las líneas que enlazan a los puntos (aristas) representan los puentes: siete en total.

El grafo a su vez puede ser representado mediante una matriz conocida como matriz de adyacencia, la cual denotaremos por A . Cada elemento a_{ij} de la matriz indica el número de aristas que enlazan al vértice i con el vértice j .

Cuando dos vértices están unidos por lo menos con una arista se dice que ellos son adyacentes.

Hemos etiquetado los vértices con los números del 1 al 4, como se muestra en la figura.

La matriz de adyacencia del grafo de la figura es:

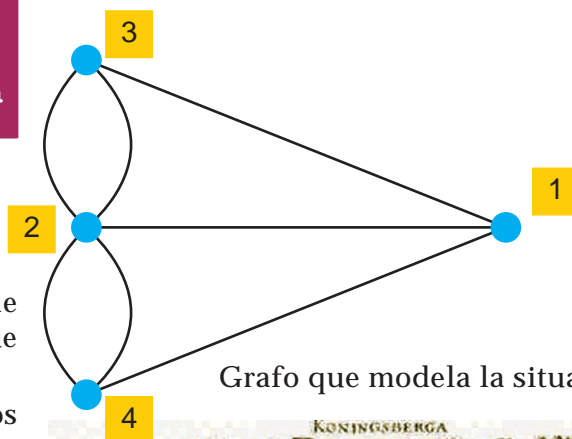
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriz está asociada con un vértice del grafo. Lo mismo ocurre con las columnas. Así, por ejemplo, la fila 2 está asociada con el vértice que lleva la etiqueta 2; y la columna cuatro con el vértice 4. En el cruce de la fila 2 con la columna 4 se encuentra justamente el elemento $a_{24}=2$. El valor de a_{24} indica que existen dos conexiones (puentes) que unen a dichos vértices. En consecuencia, el elemento simétrico a_{42} también debe ser 2, ya que si hay dos puentes que enlazan a 2 con 4, esos mismos puentes comunican a 4 con 2. Si miramos la matriz A , efectivamente ocurre esto (A es una matriz simétrica).

La matriz A puede multiplicarse por sí misma, obteniéndose la matriz AA la cual se denota A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cómo interpretamos ahora las entradas de la matriz?



Grafo que modela la situación



Por ejemplo, ¿qué significa que a_{11} valga 3 ó que a_{34} tome el valor 5?

$a_{11}=3$ significa que hay tres caminos de longitud 2 del vértice 1 a él mismo. Estos caminos son: 1-4-1; 1-2-1 y 1-3-1. Así, el camino 1-4-1 indica que salimos de 1, cruzamos el puente que lleva a 4 y nos devolvemos a 1 por ese mismo puente; es decir, hemos hecho un recorrido de longitud 2. Similar interpretación le otorgamos a los otros dos caminos.

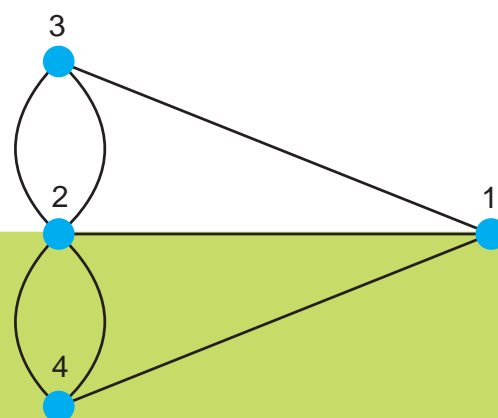
Si queremos ir del punto 3 al 4, tenemos a disposición 5 caminos de longitud 2. Una escogencia es pasar por el vértice 2, pero tenemos dos puentes, cada uno corresponde a una opción. Una vez llegados al vértice 2, nuevamente tenemos dos puentes, es decir, dos alternativas. En consecuencia, si decidimos ir desde 3 a 4 pasando por 2, tenemos $2 \times 2 = 4$ caminos posibles. El quinto camino corresponde a salir de 3, pasar por 1 y arribar a 4.

En general, cada entrada a_{ij} de la matriz A^2 representa el número de rutas o caminos de longitud 2 que existen entre los vértices i y j .



Uno de los puentes de Königsberg (hoy Kaliningrado) que todavía se encuentra en la actualidad.

Fuente: www.mattheory.info/konigsberg



¿Podrías encontrar las 9 rutas posibles (de longitud 2) para, saliendo de 2, regresar al lugar de partida cruzando dos puentes diferentes o dos veces el mismo puente?

En forma análoga podemos estudiar el significado de las entradas de las matrices $AAA=A^3$ y $AAAA=A^4$.

SABÍAS QUE...

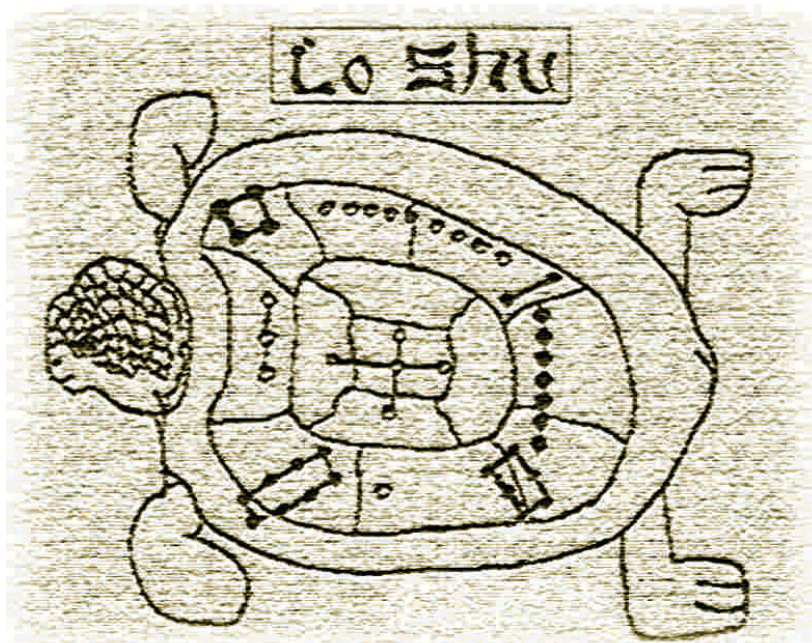
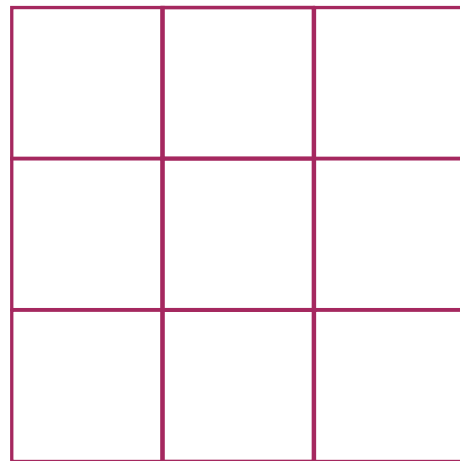


Leonhard Euler (Suiza, 1707-1783), matemático y físico, realizó numerosas contribuciones en las áreas de matemática y física donde destacan la teoría utilizada en Mecánica de Fluidos (usada luego para la explicación del vuelo de los aviones) y la teoría sobre la rotación de cuerpos rígidos usada en la trayectoria de satélites. El sistema postal de su país natal elaboró una estampilla de 10F en su honor.



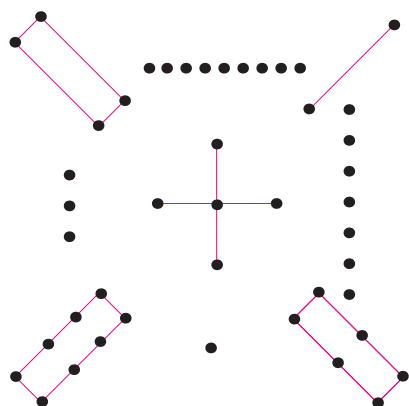
Matrices y cuadrados mágicos

En el cuadrado de la derecha que está subdividido en 9 casillas, debes colocar los números del 1 al 9 sin repetir ninguno, con la condición de que al sumar los números por filas, columnas o diagonales siempre resulte 15. ¿Podrás hacerlo?



Cuenta la leyenda que el emperador Yu el Grande [de la dinastía Xia] vio emerger una tortuga de las aguas del río Lo, en cuyo caparazón aparecía un grabado con símbolos numéricos. A este grabado se le denominó Lo shu, que significa “Escrito del Río Lo”.

El Lo Shu puede representarse gráficamente así:



A esta disposición de los números del 1 al 9 se le llama un cuadrado mágico.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Representación numérica actual

Un cuadrado mágico es una disposición numérica de forma cuadrada, tal que al sumar los números de una misma fila, columna o dia-

gonal se produce siempre el mismo resultado. A este resultado se le denomina constante mágica.

La matriz M es un cuadrado mágico. Para comprobarlo basta sumar los elementos de cada fila, de cada columna y de las diagonales, y verificar que la suma siempre es la misma: la constante mágica es $k=15$.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Las anteriores son diferentes formas de representar un cuadrado mágico.

SABÍAS QUE...



Los antecedentes más lejanos que se tienen de los cuadrados mágicos se remontan a la milenaria China, hacia el 2200 a.C. El Lo Shu es el cuadrado mágico más antiguo que se conoce.

Otro cuadrado mágico famoso es el que aparece en el lado superior derecho de la obra “Melancolía” del famoso artista del Renacimiento Alberto Durero (Alemania, 1471-1528).



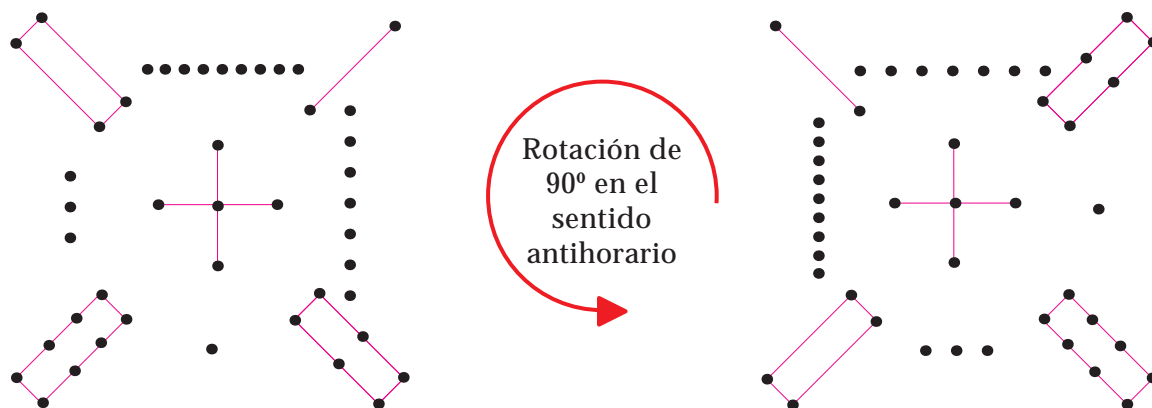
Como dato curioso, la obra fue creada en 1514.



Se llama orden de un cuadrado mágico al número de filas (o de columnas) que tiene la matriz que lo representa. Así, el Lo Shu es de orden 3, mientras que el cuadrado mágico que aparece en la “Melancolía” de Durero es de orden 4.

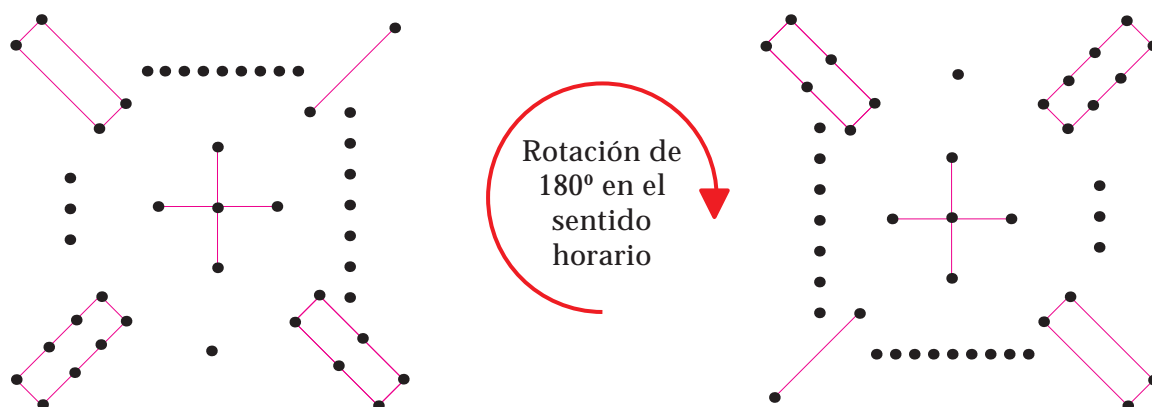


¿Qué ocurre si rotamos la figura del Lo Shu alrededor del centro de la cruz (la cual representa al número 5) que está en el centro?



¡Obtenemos como resultado un cuadrado mágico!

¿Qué ocurre si rotamos el Lo Shu (alrededor de la cruz central) 180° en sentido horario?



¡Nuevamente obtenemos un cuadrado mágico!

¿Cómo quedan plasmadas estas rotaciones en la matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{90^\circ} M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{180^\circ} M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que una rotación de la figura equivale a realizar ciertas transformaciones de las filas y columnas de la matriz.

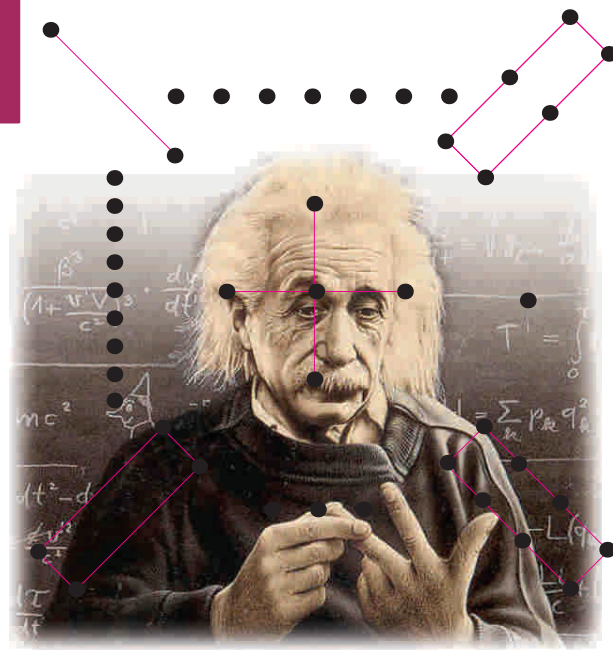
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{90^\circ} M_3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, en el caso que mostramos, las filas primera, segunda y tercera de M se convierten, respectivamente, en las columnas tercera, segunda y primera de M_3 .

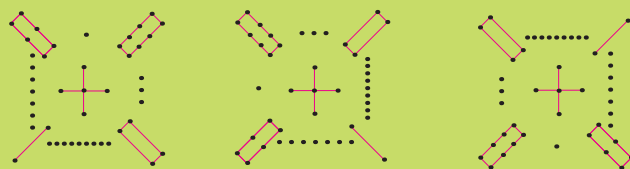
Tengo que pensarlo

Verifique, usando las matrices, que se produce el mismo resultado si se rota el Lo Shu 180° en el sentido horario o en el sentido contrario.

Puede probarse matemáticamente, que dado un cuadrado mágico de cualquier orden, las rotaciones respecto a su centro producen nuevamente un cuadrado mágico.



¿Será la matriz transpuesta (M^t) un cuadrado mágico? ¿Habrá alguna combinación de rotaciones del Lo Shu que produzcan un cuadrado mágico cuya representación sea M^t ?



INTERESANTE

Debido a la estructura particular de los cuadrados mágicos, si consideramos 9 números naturales y establecemos la condición de que ninguno se puede repetir, sólo existe un único cuadrado mágico de orden 3. Con 16 números naturales sin repetición existen 880 cuadrados mágicos de orden 4; y de orden 5, pueden formarse 275 305 224 empleando 25 números naturales distintos. Para los órdenes superiores al 5 se desconoce cuántos hay.



La estructura de un cuadrado mágico de orden 3 es la que aparece al lado.

¿Podrías deducirla a partir de la definición de cuadrado mágico?

$$M = \begin{pmatrix} a+c & a-b-c & a+b \\ a+b-c & a & a-b+c \\ a-b & a+b+c & a-c \end{pmatrix}$$

Al considerar cuadrados mágicos, podemos preguntarnos qué operaciones se pueden efectuar con ellos de manera que resulte nuevamente un cuadrado mágico.

Es posible probar matemáticamente que la adición y la sustracción de cuadrados mágicos produce cuadrados mágicos. Asimismo, un cuadrado mágico multiplicado por un número siempre produce un cuadrado mágico.

También se puede probar, matemáticamente, que cuando se multiplican entre sí *un número par de cuadrados mágicos, en general no se obtiene como resultado un cuadrado mágico*; mientras que si se efectúa la multiplicación de una *cantidad impar de ellos, el resultado siempre es un cuadrado mágico*.

Algunas curiosidades de los cuadrados mágicos

Cuadrado mágico de orden 6 cuyas filas y columnas suman 111, número que utiliza la creencia china para ahuyentar los malos espíritus.



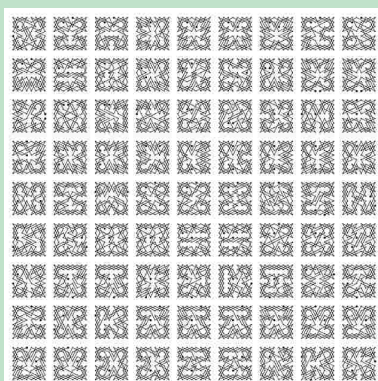
16	115	43	4	11
44	1	12	39	93
35	17	94	41	2
91	42	25	13	18
3	14	15	92	65

En éste cuadrado mágico de orden 5, en la última fila se leen los primeros decimales del número π .

Es posible generalizar la noción de cuadrado mágico: en lugar de sumar las entradas de filas, columnas y diagonales, se multiplican éstas para producir el mismo resultado. Se obtiene así un cuadrado mágico multiplicativo. La constante mágica del que se muestra es 2^{12} .

128	1	32
4	16	64
8	256	2

INTERESANTE



Históricamente los cuadrados mágicos han estado muy ligados al pensamiento místico.

El gran matemático Euler relacionó los cuadrados mágicos con los cuadrados latinos, y hoy en día se definen sobre ellos lo que se denomina líneas mágicas, las cuales producen bellos diseños geométricos empleados en el arte.

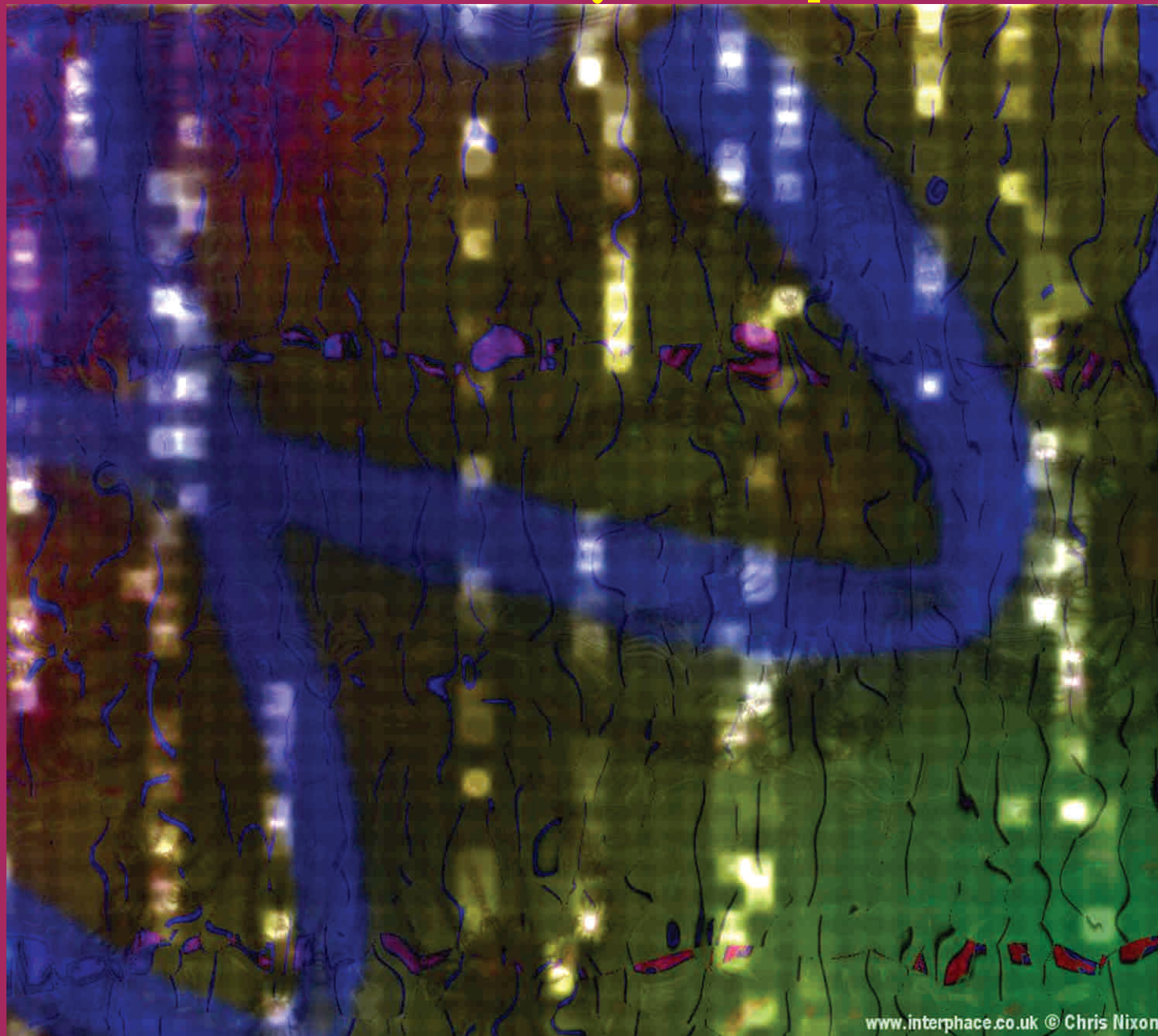
Cuadrado mágico de orden 4 que está en la catedral de la Sagrada Familia en Barcelona, España. Sus filas, columnas y diagonales suman 33 (edad de la muerte de Cristo).





Matemática Maravillosa

Matrices y sus operaciones



www.interphace.co.uk © Chris Nixon

Matrices 4 es una obra digital realizada por Chris Nixon, artista británico de 27 años de edad, el cual utiliza herramientas y programas de computación para realizar sus propuestas artísticas tanto visuales como en audio y video.

Fuente: <http://www.spellsabre.co.uk>

Fascículo

19



Últimas Noticias

Matrices y vida cotidiana

Yahoo! Tiempo - Caracas

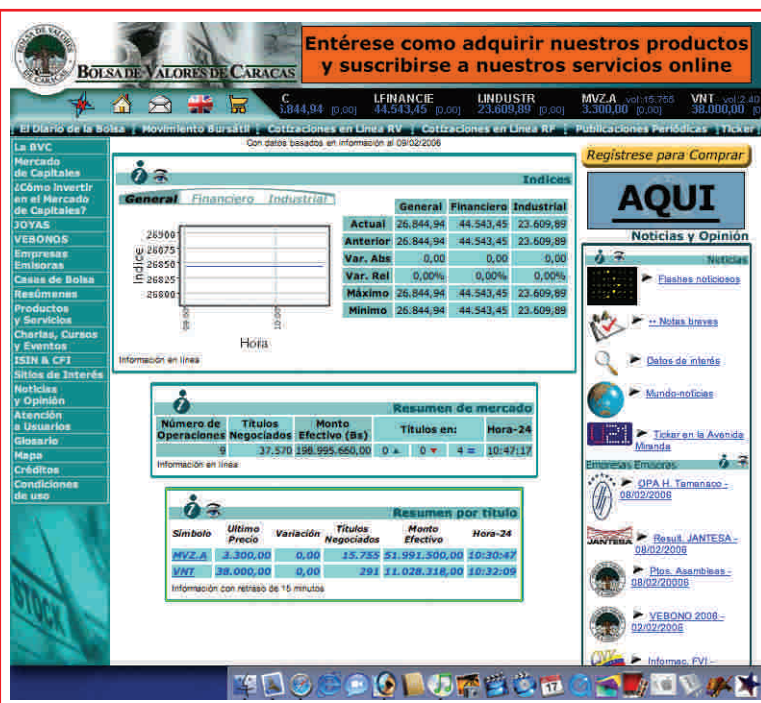
Tiempo > Venezuela > Caracas



En esta figura se indican las probables características del tiempo y las temperaturas máximas y mínimas previstas para la ciudad de Caracas, desde el día viernes 30 de diciembre hasta el lunes 2 de enero de 2006.

En la gráfica de la izquierda, la Bolsa de Valores de Caracas presenta los resultados de las transacciones ocurridas en un determinado período, en donde se pueden percibir los cambios y variaciones que se sucedieron así como realizar algunas comparaciones dentro del mismo cuadro.

Este cuadro presenta algunas estadísticas sobre el béisbol en Venezuela para la temporada 2005-2006.



Resumen por título (en Bs)			
Símbolo	Último Precio	Variación	Monto Efectivo
MVZ.A	3.300,00	0,00	51.991.500,00
VNT	38.000,00	0,00	11.028.318,00

Todas estas situaciones se expresan mediante cuadros de números en filas y columnas denominados matrices.



TEMPORADA 2005/2006

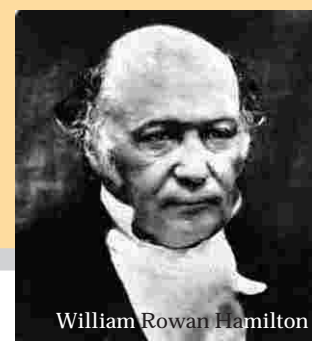
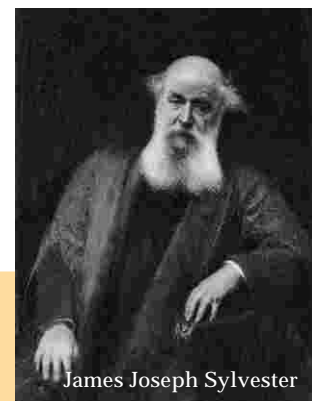
DIVISIÓN ORIENTAL	JJ	JG	JP
MAGALLANES	62	39	23
LEONES	62	35	27
CARIBES	62	32	30
TIBURONES	62	31	31

DIVISIÓN OCCIDENTAL	JJ	JG	JP
TIGRES	62	38	24
CARDENALES	62	27	35
PASTORA	62	23	39
AGUILAS	62	23	39

JJ = Juegos Jugados. JG = Juegos Ganados. JP = Juegos Perdidos

SABÍAS QUE... ?

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J. J. Sylvester (Inglaterra, 1814-1897). El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W. R. Hamilton (Irlanda, 1805-1865) en 1853.



En otras palabras, una disposición rectangular de n filas y m columnas, con $n \times m$ elementos de un mismo conjunto, es lo que se denomina matriz de orden n por m . Cada elemento de la matriz se llama entrada y usualmente se denota con una letra y un par de subíndices que indican la fila y la columna donde está ubicado. Por ejemplo, a_{23} está en el cruce de la segunda fila con la tercera columna. Dos matrices del mismo orden son iguales si sus respectivas entradas son iguales.

Los elementos de una matriz pueden ser, en general, objetos matemáticos de muy variados tipos. Por ejemplo, números de un conjunto o determinado tipo de funciones. Nosotros trabajaremos exclusivamente con matrices cuyas entradas son números reales.



Leones del Caracas:
Campeones de la
Temporada de
Beisbol Profesional
de Venezuela 2005-
2006 y campeones de
la serie del Caribe
2006.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 0,2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz A de orden 2×3
Entrada $a_{23} = -1$

Denominación	Descripción	Ejemplo
Matriz fila	Matriz que tiene una sola fila, siendo su orden $1 \times m$.	$A = (1 \ 5 \ -1)$
Matriz columna	Matriz que tiene una sola columna, siendo su orden $n \times 1$.	$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0,2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Matriz nula	Matriz con todas las entradas nulas.	$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz opuesta	La matriz opuesta de una matriz A, es la matriz que tiene por entradas las de la matriz A cambiadas de signo. Esta matriz se denota por $-A$.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta	La matriz traspuesta de la matriz A es la matriz A^t que se obtiene de la matriz A intercambiando filas por columnas.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada	La que tiene igual número de filas y columnas: $n=m$. Se dice de orden n . <u>Diagonal Principal</u> : entradas con subíndices iguales (a_{ii}). <u>Traza de una matriz</u> : suma de los elementos de la diagonal principal: $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.	$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $Traza(H) = 1+3-6 = -2$
Matriz identidad	Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son nulos, salvo los de la diagonal principal que son iguales a 1. La matriz identidad de cualquier orden se denota por I.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es costumbre denotar los puntos del plano con letras mayúsculas, por ejemplo P, Q, etc., mientras que para indicar sus coordenadas escribimos (x, y) . Con los vectores se usa la misma notación, para señalar las coordenadas y para indicar el vector se usan letras, por lo general, minúsculas con una flecha, o letras minúsculas en negrilla, \vec{v} .

Aquí identificaremos los puntos del plano con los vectores del plano y con las matrices filas o columnas. Por ejemplo: el punto P de coordenadas (x, y) se identifica con el vector \vec{v} de coordenadas (x, y) , con la matriz fila $(x \ y)$ y la matriz columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Esto mismo podemos realizarlo con los puntos del espacio, del espacio n -dimensional y con los vectores del espacio o del espacio n -dimensional y con las matrices filas o columnas con el correspondiente número de entradas.

Adición de matrices

Una industria del calzado tiene dos plantas P_1 y P_2 . En P_1 se confeccionan zapatos para niños y en P_2 zapatos para adultos. Los costos de elaboración y venta de cada par de zapatos se muestran en el siguiente cuadro:



	Costos de producción de cada par de zapatos (Bs)			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P1	45 000	46 000	0	0
P2	0	0	95 000	97 000

Mientras que las ganancias por la venta de cada par de zapatos es:

	Ganancias por la venta de cada par de zapatos (Bs)			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P1	20 000	16 000	0	0
P2	0	0	40 000	43 000

Con esos datos podemos considerar dos matrices: C de costos y G de ganancias:

$$C = \begin{bmatrix} 45\,000 & 46\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95\,000 & 97\,000 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 20\,000 & 16\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40\,000 & 43\,000 \end{bmatrix}$$

Si deseamos determinar los precios de ventas (P) de cada par de zapatos, podríamos considerar una matriz M donde en cada una sus entradas se coloca la suma de los costos de producción y las ganancias. Así resulta que:

$$M = \begin{bmatrix} 45\,000+20\,000 & 46\,000+16\,000 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 95\,000+40\,000 & 97\,000+43\,000 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 65\,000 & 62\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 135\,000 & 130\,000 \end{bmatrix}$$

De esta manera, la matriz M corresponde matemáticamente a la suma de las matrices C y G.

$$M = C + G$$

En general podemos sumar algebraicamente matrices del mismo orden.

Si A y B son matrices del mismo orden, se define la matriz suma $A+B$ o $A-B$ como una nueva matriz cuyo elemento c_{ij} es la suma o resta de los elementos $a_{ij} \pm b_{ij}$ de las matrices A y B, respectivamente.



Producto de un número por una matriz

Un establecimiento que vende productos de aseo personal, ha decidido hacer un descuento del 10% en los precios de tres marcas de jabones de tocador. Si los precios actuales están señalados en el siguiente cuadro, a partir de ellos podemos calcular el descuento de cada jabón, tal como se indica a continuación:

Marca de jabón	A	B	C
Precio por unidad (en Bs)	1 550	1 225	1 350

Marca de jabón	A	B	C
Descuento por unidad (en Bs)	$0,1 \cdot 1\,550 = 155$	$0,1 \cdot 1\,225 = 122,5$	$0,1 \cdot 1\,350 = 135$

Utilizando matrices también podemos obtener este resultado. En el caso planteado, podemos considerar la matriz fila $P = (1\,550 \ 1\,225 \ 1\,350)$ que representa los precios de los jabones de las tres marcas. Cuando se calculó el descuento por marca, multiplicamos el precio de cada una de ellas por 0,1. Así podemos definir el producto del número 0,1 por la matriz P , como:

$$0,1 P = (0,1 \cdot 1\,550 \quad 0,1 \cdot 1\,225 \quad 0,1 \cdot 1\,350) = (155 \quad 122,5 \quad 135).$$

En general, el producto de un número λ por una matriz A es una matriz denotada por λA , cuyas entradas son las de la matriz A multiplicadas por el número λ . Es decir, la entrada c_{ij} de la matriz λA es λa_{ij} , donde a_{ij} es el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz A .

Producto escalar de vectores

Siguiendo con el ejemplo de los jabones, al comprar 5 jabones de la marca A, 8 de la marca B y 6 de la marca C, se gastan (en bolívares)

$$5 \cdot 1\,550 + 8 \cdot 1\,225 + 6 \cdot 1\,350 = 25\,650$$

Si representamos por $u = (5, 8, 6)$ el vector fila cuyos elementos son las cantidades requeridas de cada una de las marcas y por $v = (1\,550, 1\,225, 1\,350)$ el vector fila cuyos elementos son los precios en bolívares de cada uno de los jabones, entonces el producto que hemos realizado para obtener el monto total se conoce como el producto escalar de los vectores u y v , el cual se efectúa multiplicando cada una de los correspondientes elementos y luego sumando todos los resultados parciales obtenidos.

En general, si tenemos dos vectores del mismo orden:

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ y } v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

se define el producto escalar de los vectores u y v como:

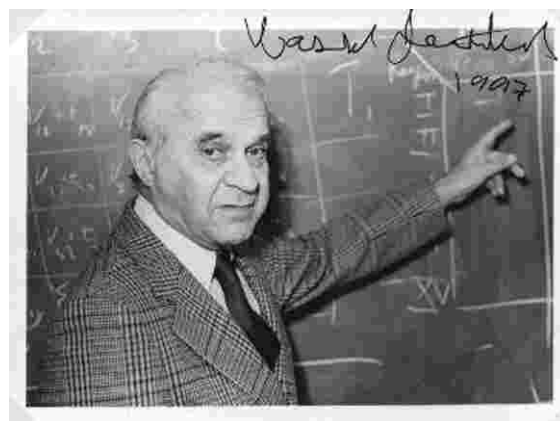
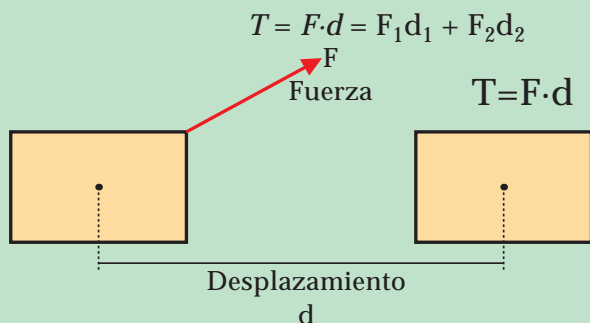
$$u \cdot v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$



$$\begin{aligned} u \cdot v &= (5, 8, 6) \cdot (1\,550, 1\,225, 1\,350) \\ &= 5 \cdot 1\,550 + 8 \cdot 1\,225 + 6 \cdot 1\,350 \\ &= 25\,650 \end{aligned}$$

INTERESANTE

Cuando un objeto se mueve como consecuencia de la aplicación de una fuerza, existe una relación entre el desplazamiento y la fuerza que los físicos denominan Trabajo. Si un objeto realiza un desplazamiento d al aplicársele una fuerza constante F , el trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Por ejemplo, si aplicamos a un objeto una fuerza constante de dos componentes $F=(F_1, F_2)$ y se produce un desplazamiento en el plano $d=(d_1, d_2)$, el trabajo realizado es:

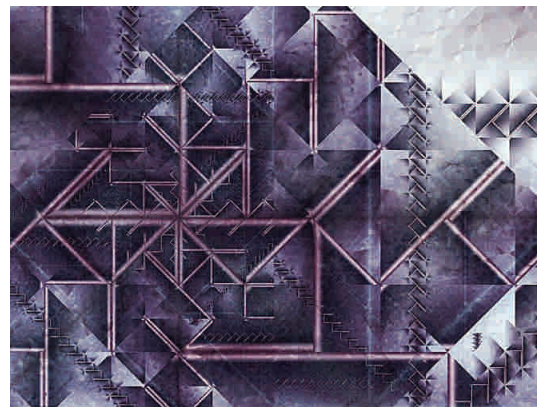


En la década de los años cuarenta del siglo pasado, Leontief (premio Nobel de economía en 1973) introduce un modelo, utilizando matrices, llamado insumo-producto (en inglés input-output), para realizar un estudio de la economía de Estados Unidos, en el que considera las interacciones entre 500 industrias. Con este modelo se pretende predecir los niveles de producción de cada industria, a fin de cubrir sus demandas.

Este gran economista visitó Caracas en 1989 y dictó una conferencia titulada "Análisis y modelos de los sistemas energéticos" en el "Congreso Internacional Energía, Ambiente e Innovación Tecnológica", patrocinado por la Universidad Central de Venezuela y la Universidad de Roma "La Sapienza".

Producto de matrices

Usando el producto escalar podemos multiplicar matrices. Para esto consideremos dos matrices A y B , tales que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B (esta condición es imprescindible para hacer el producto $A \cdot B$, en ese orden). Por ejemplo, supongamos que A es una matriz de orden $n \times m$ y B es una matriz de orden $m \times p$. Entonces la entrada c_{ij} de la matriz producto $A \cdot B$ es el producto escalar de la fila i de la matriz A , por la columna j de la matriz B .



Matrix Management (2000). Paul DeCelle.

Matriz A		Matriz B		Matriz producto A·B
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$	•	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$	=	$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}_{n \times p}$
<div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; display: inline-block;">Fila i</div>		<div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; display: inline-block;">Columna j</div>		<div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; display: inline-block;"> $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$ $= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj})$ </div>

Por ejemplo, consideremos la producción de arroz (en toneladas) en los llanos occidentales y centrales del país en los años 1997 y 1998.

Año	Llanos occidentales	Llanos centrales
1997	429 750	274 000
1998	423 675	221 851



Matriz asociada a la tabla $A = \begin{pmatrix} 429\,750 & 274\,000 \\ 423\,675 & 221\,851 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

Si queremos calcular la producción total de arroz de los Llanos durante los años 1997 y 1998 basta multiplicar la matriz A por la matriz columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 429\,750 & 274\,000 \\ 423\,675 & 221\,851 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 429\,750 + 274\,000 \\ 423\,675 + 221\,851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 703\,750 \\ 645\,526 \end{pmatrix}_{2 \times 1}.$$


INTERESANTE

Con las operaciones de adición y multiplicación que se han definido, las matrices cuadradas de orden n, por ejemplo de orden 2, tienen propiedades similares a las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros: asociatividad de la adición y de la multiplicación; conmutatividad de la adición; existencia de elemento neutro para ambas operaciones; existencia de opuesto y distributividad de la multiplicación respecto a la adición. La diferencia está en que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

La matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro para la adición.

La matriz opuesta -A de una matriz A es el elemento opuesto para la adición.

La matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro para la multiplicación.

Si consideramos, por ejemplo, la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la multiplicamos por la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y, además, } BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Es decir, el producto de estas matrices, en cada caso, es igual a la matriz identidad. Cuando esto ocurre con una matriz cuadrada A , se dice que la matriz tiene inversa y la matriz B se llama inversa de la matriz A , la cual se denota por A^{-1} .

Existen criterios para determinar si una matriz tiene inversa y métodos para hallarla cuando acontece tal situación.

En el caso de matrices cuadradas de orden 2 podemos afirmar lo siguiente:

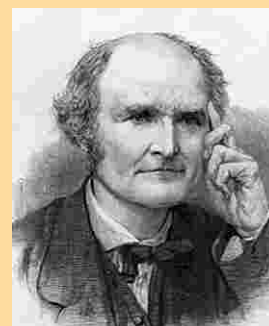
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \text{ es invertible si y sólo si } ab - cd \neq 0 \text{ y, en este caso, la inversa es: } A^{-1} = \frac{1}{ab - cd} \begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

SABÍAS QUE... ?

En 1858, Arthur Cayley (Inglaterra, 1821-1895) introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y define las operaciones con matrices.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = x' \\ a_2x + b_2y = y' \end{cases} \text{ se puede escribir en forma matricial } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

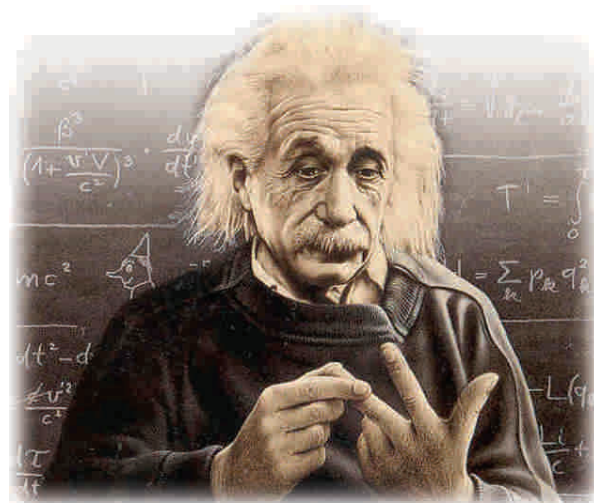


TENGO QUE PENSARLO

En el problema de la fabricación de zapatos, usa el producto de matrices para calcular la ganancia que se obtiene al vender 25 pares de zapatos para niños, 35 para niñas, 45 para hombres y 47 para mujeres.

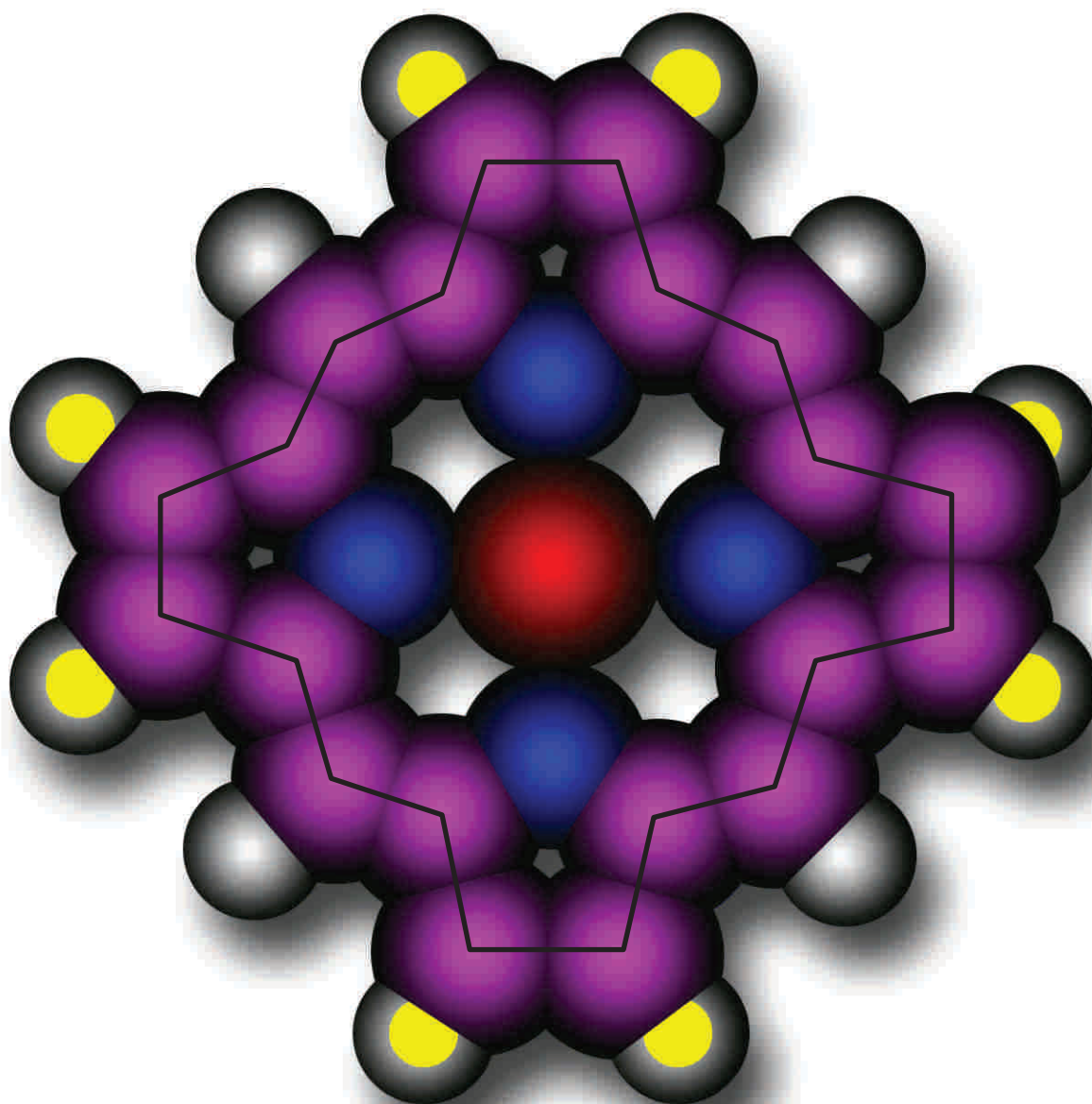
$$\text{Sea la matriz } A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprueba si es invertible y de serlo halla su inversa.



La matriz es invertible y su inversa es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$



La simetría “corre” por nuestras venas. Esta imagen representa el núcleo central del grupo hemo, el centro activo de la hemoglobina que oxigena nuestras células.

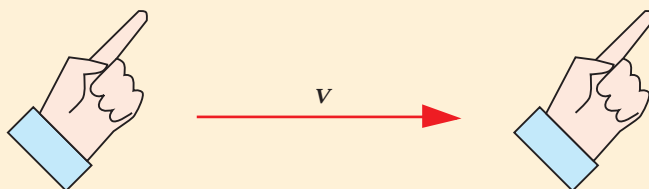
Fuente: <http://www.cienciateca.com/simetria.html>

Matrices y transformaciones geométricas en el plano

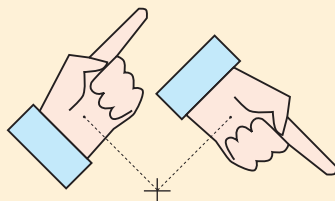
Una transformación en un plano, es una aplicación que hace corresponder a cada punto P de coordenadas (x, y) del plano, otro punto P' de coordenadas (x', y') del mismo plano. En consecuencia, cualquier conjunto de puntos F se puede transformar en otro conjunto de puntos F' .

Transformaciones usuales

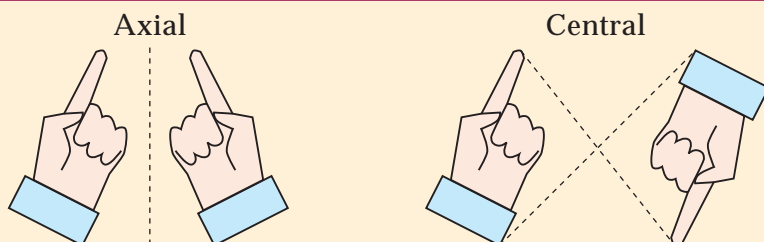
Traslación



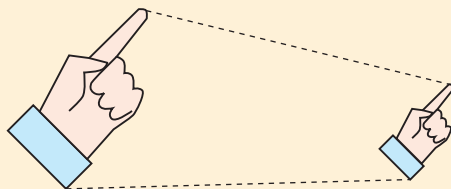
Rotación



Simetría



Homotecia



Mantienen la forma y el

tamaño de la figura

(son isometrías o movimientos

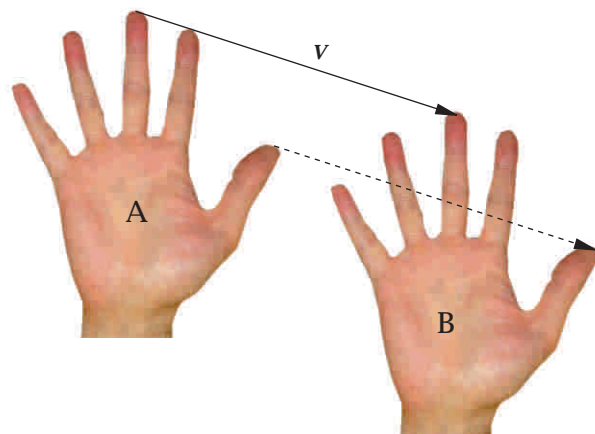
rígidos).

Varía el tamaño
de la figura pero
no la forma.

Traslación

Geométricamente la traslación T representa el desplazamiento de un punto o conjunto de puntos según un vector fijo v , no nulo.

La figura de la mano fue trasladada desde la posición A hasta la posición B. Observa que ningún punto de la figura inicial permanece fijo.



Composición de traslaciones

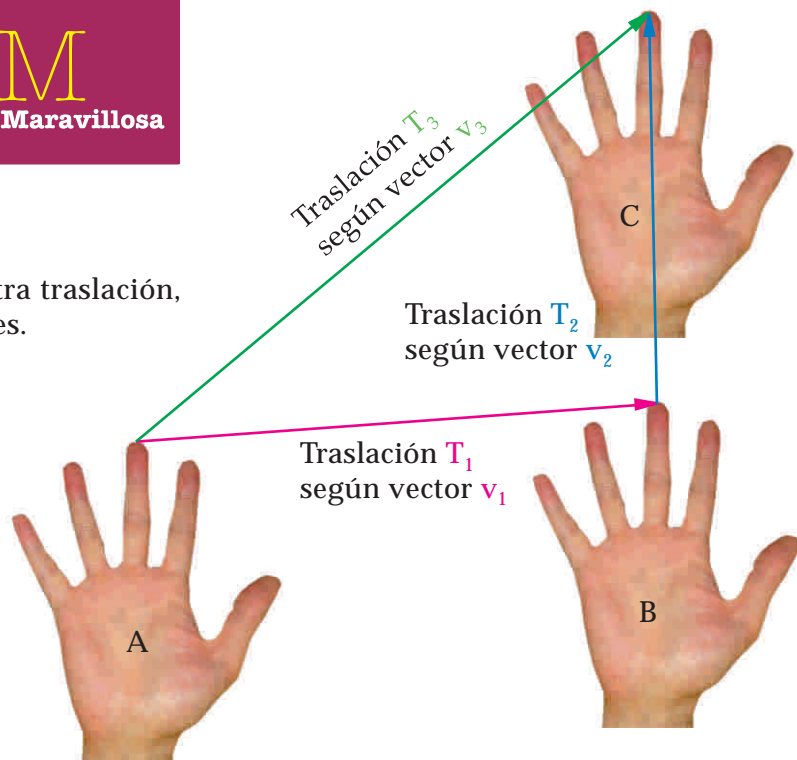
Si al resultado de una traslación se le aplica otra traslación, se dice que hay una composición de traslaciones.

Traslación compuesta

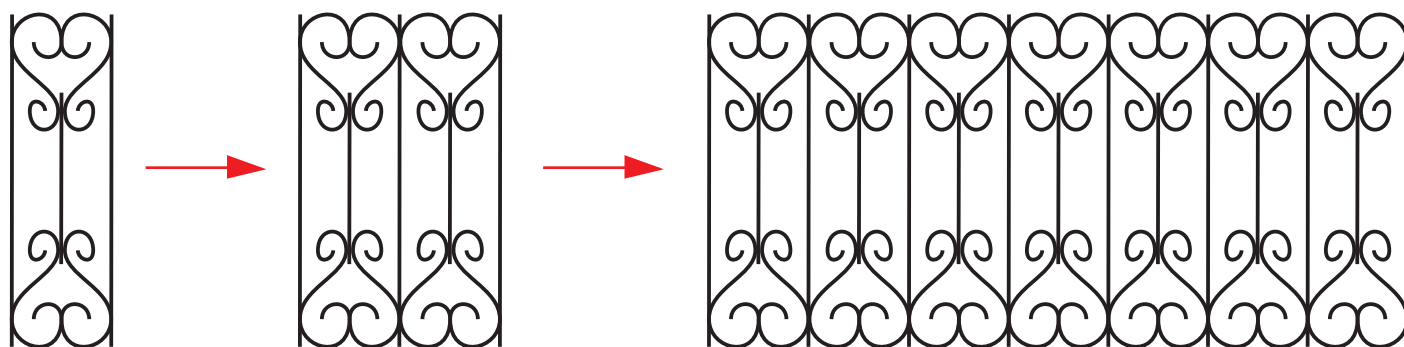
$T_3 = T_2 \circ T_1$ (\circ compuesto con)

según vector

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$



Composición de varias traslaciones



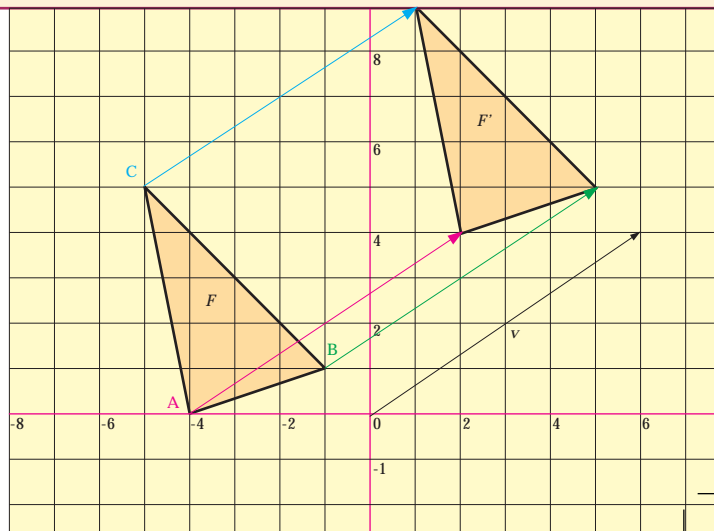
A todo punto P de coordenadas (x,y) del plano, se le asocia el vector $\mathbf{r}=(x,y)$ y la matriz columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, de manera que una traslación T según el vector $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ se puede identificar con una adición de matrices columnas

Traslación según el vector representado por	Transforma el vector representado por	En el vector representado	De coordenadas	Operaciones con matrices
$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x + v_1 \\ y' = y + v_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{pmatrix}$

Al trasladar el triángulo F según el vector $\mathbf{v}=(6, 4)$, resulta el triángulo F' .

Realizemos la suma de matrices columnas asociada a cada vértice, con la matriz asociada al vector de traslación.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Rotación

En la vida cotidiana se presentan situaciones como las siguientes:



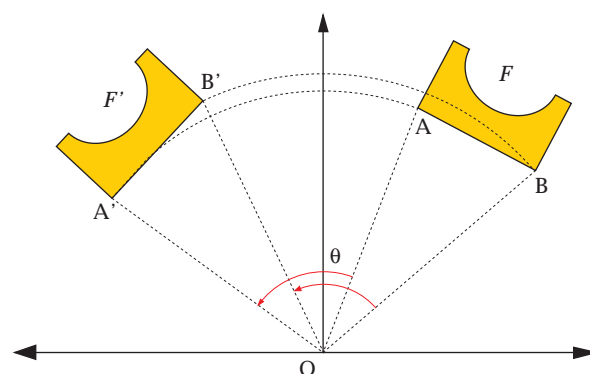
El abanico abre girando alrededor del punto O . Las aspas del ventilador y cada aguja del reloj gira alrededor de un punto único.



Geométricamente una rotación en el plano representa una transformación o giro de una figura en torno a un punto fijo, llamado centro de rotación, que puede estar o no dentro de la figura.

Al rotar la figura F un ángulo θ en sentido antihorario alrededor del origen de coordenadas O , se obtiene la figura F' .

Observa que hay un único punto fijo O que es el centro de rotación.

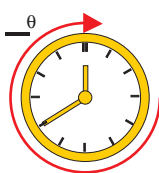
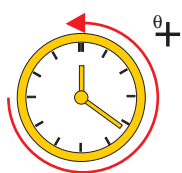


Rotación y tecnología

Una forma de producir electricidad es a partir de la energía proporcionada por el viento o *energía eólica*. El dispositivo capaz de realizar esta conversión se denomina *aerogenerador* o *generador eólico*, y consiste en un sistema mecánico de *rotación*, provisto de aspas a modo de los antiguos molinos de viento, y de un generador eléctrico con el eje conectado al sistema motriz. De esta forma el viento, al hacer girar las aspas, hace también girar al generador eléctrico, que puede ser un alternador. Igual que en el caso de la energía solar, es necesario disponer de acumuladores para almacenar la energía eléctrica con la finalidad de ser utilizada en los períodos sin viento.



Rotación	Transforma el vector representado por	En el vector representado por	De coordenadas	Matriz asociada a la rotación
De ángulo θ	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$



Sentidos de los ángulos

Para hallar el transformado de un punto según una rotación de ángulo θ , basta multiplicar la matriz de rotación por la matriz columna asociada a ese punto.

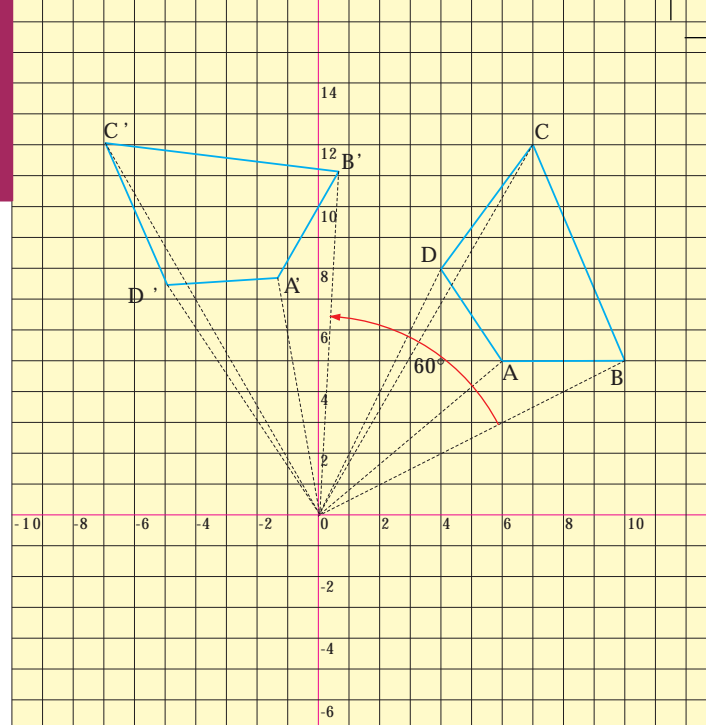
$$R_\theta \cdot V = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Rotemos el cuadrilátero ABCD un ángulo $\theta=60^\circ$ en torno al origen.

A cada vértice le asociamos su matriz columna:

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Al efectuar la multiplicación de la matriz de rotación por cada una de las matrices anteriores, obtenemos las coordenadas de los vértices transformados (rotados 60°).



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\text{Para el punto A, } R \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos 60^\circ - 5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ \\ 6 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ + 5 \cdot \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,35 \\ 7,72 \end{pmatrix}$$



¿Cuáles son las coordenadas de las transformadas de los vértices B, C y D?

Al aplicar dos o más rotaciones seguidas al mismo objeto, por ejemplo una mariposa, estamos realizando una composición de rotaciones.

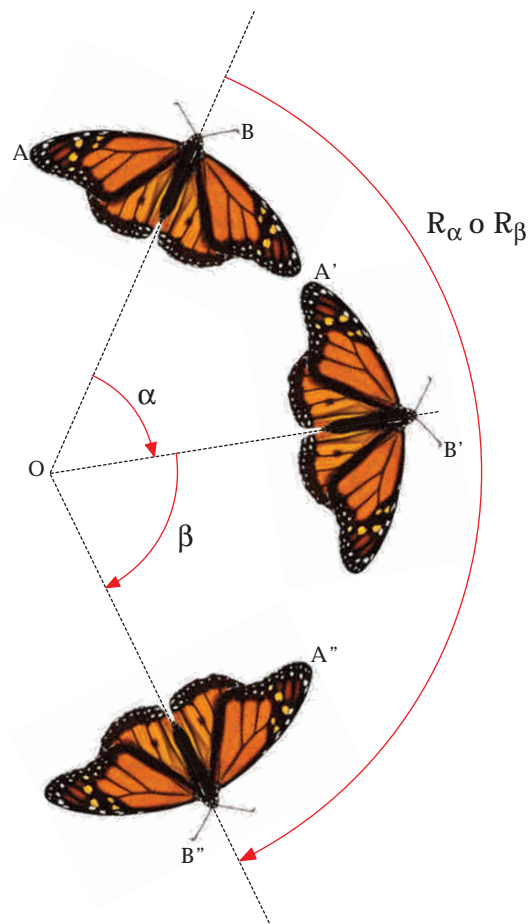
Primero aplicamos la rotación R_α de ángulo α a la mariposa y luego la rotación R_β de ángulo β . La transformación resultante es la composición

$$R = R_\beta \circ R_\alpha$$

La compuesta de dos rotaciones de ángulos α y β respectivamente es igual a una rotación de ángulo $\alpha + \beta$:

$$R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta} = R_{\beta+\alpha} = R_\alpha \circ R_\beta$$

Es decir, el orden en que se realicen las rotaciones de ángulos α y β no altera la posición final del objeto.

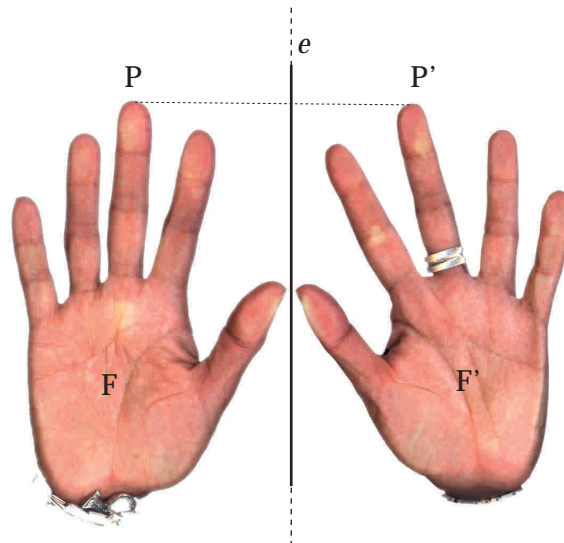
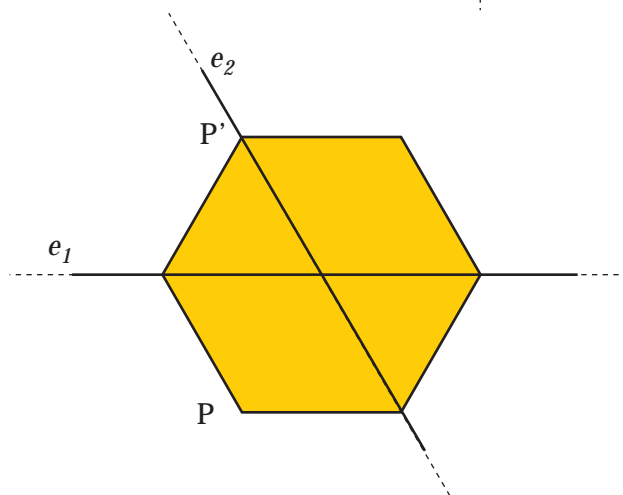
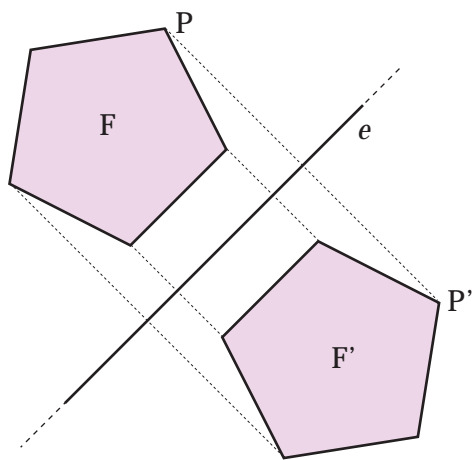


Determina la matriz de la rotación de ángulo $\alpha + \beta$, a partir de la multiplicación de las matrices de rotación de ángulos α y β , respectivamente.

¿Se cumple en este caso la propiedad conmutativa de la multiplicación de matrices?

Simetría respecto a una recta

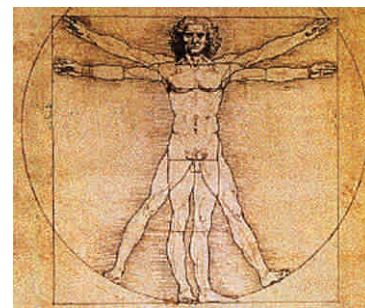
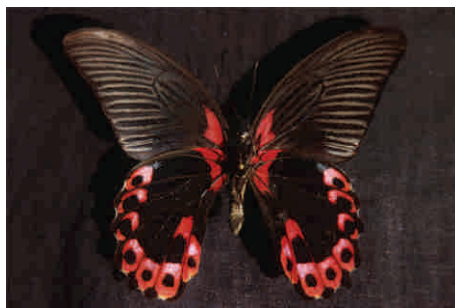
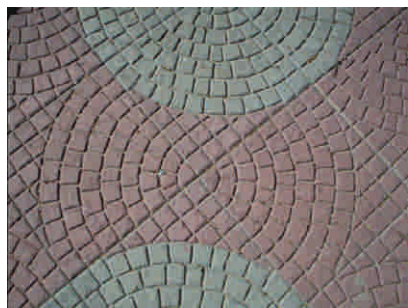
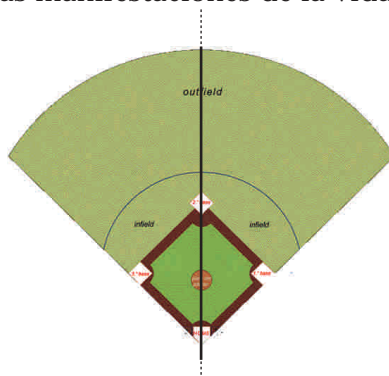
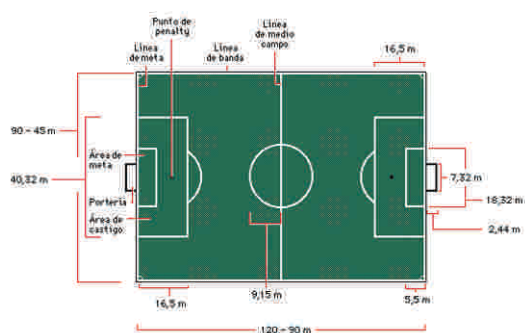
Geométricamente la reflexión de una figura en el plano respecto de una recta dada e , representa su imagen simétrica respecto a ella. La recta e se denomina eje de simetría.



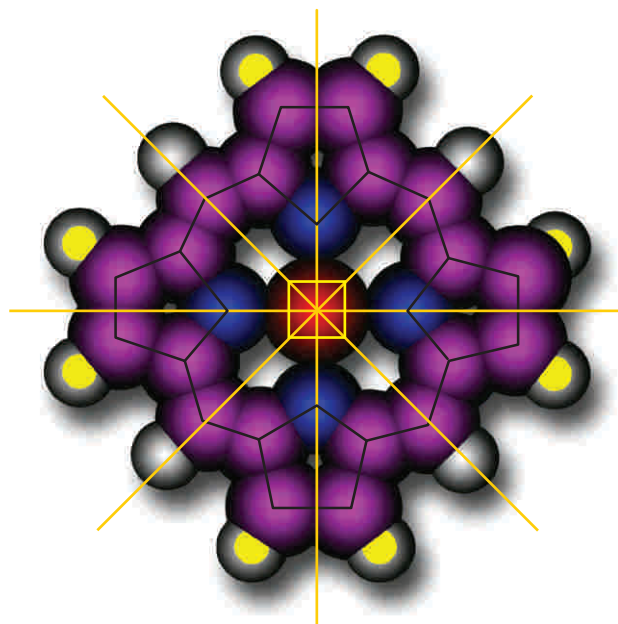
¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?



La reflexión se puede observar en diversas manifestaciones de la vida cotidiana.



El centro activo de la hemoglobina es un anillo de porfirina con un átomo de hierro (en rojo) en el centro. El "esqueleto" de este macrociclo de porfirina (marcado con líneas negras) está compuesto por átomos de carbono (morados) y nitrógeno (azules). Las esferas blancas representan átomos de hidrógeno, mientras que las marcadas de amarillo pueden ser diversos grupos orgánicos. Las líneas anaranjadas representan planos de simetría perpendiculares a la figura, mientras que el cuadrado amarillo del centro indica un eje de simetría cuaternario que coincide con la recta de intersección de los planos de simetría. Además de los elementos de simetría indicados, esta molécula (que es plana y cuyo anverso y reverso son equivalentes) posee ejes binarios, un plano de simetría que coincide con el plano del papel, y un centro de simetría que coincide con el punto donde se intersecan todos los otros elementos de simetría.



Simetría axial

En el plano es posible aplicarle una simetría axial o reflexión a una figura respecto al eje x , al eje y o respecto a una recta cualquiera. Para ello basta aplicar la matriz de transformación adecuada como muestra la tabla:

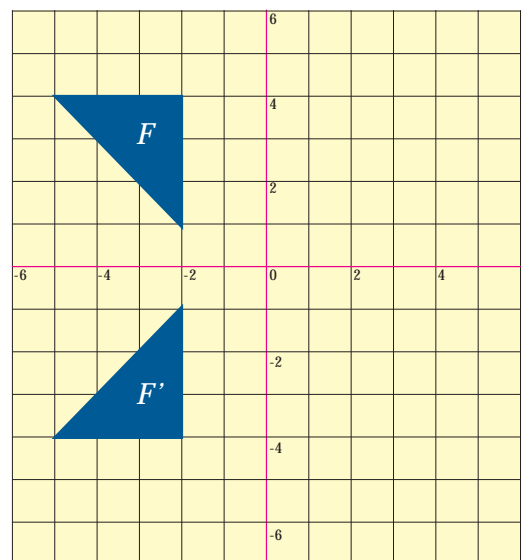
Simetría	Transforma el vector representado por	En el vector	De coordenadas	Matriz asociada
Respecto al eje x	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Respecto al eje y	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Respecto a la recta $y=x$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Al aplicar una simetría al triángulo F respecto al eje x , resulta el triángulo F' .

Multiplicamos la matriz de la simetría axial respecto al eje, por la matriz columna de cada punto, haciendo ésto con los vértices:

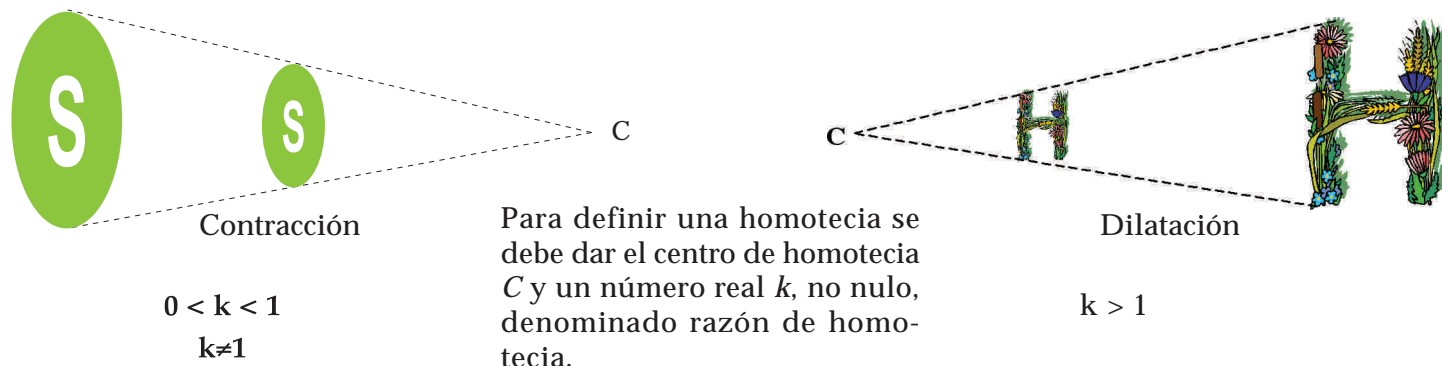
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manera similar, se procede para aplicar la simetría respecto al eje y o respecto a la recta $y=x$, obteniéndose otros triángulos.



Homotecia

Geométricamente la homotecia es una transformación que cambia el tamaño de un objeto sin variar su forma. Dos figuras son homotéticas si al unir mediante rectas los puntos correspondientes de ellas, estas rectas concurren en un único punto C llamado centro de la homotecia.



Si B' es el transformado de B según una homotecia de centro C , se cumple que los segmentos \overline{CB} y $\overline{CB'}$ son alineados y proporcionales, es decir: $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = k$

Homotecia	Transforma el vector representado por	En el vector representado por	De coordenadas	Matriz asociada
De razón k y de centro $(0,0)$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Homotecia y tecnología

Al fotocopiar un documento con la finalidad de ampliarlo o reducirlo, la máquina realiza el proceso de transformación del documento original mediante una homotecia de la razón necesaria para obtener un “zoom”, que para nuestro caso va desde 70% hasta 150%”.

